

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Sistemas e equações de Schrödinger assintoticamente lineares no infinito

por

**Raquel Lehrer**

Brasília

2012

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Sistemas e equações de Schrödinger assintoticamente lineares no infinito

por

**Raquel Lehrer**

*Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília como parte  
dos requisitos necessários para obtenção do grau de*

**DOCTORA EM MATEMÁTICA**

30 de Outubro de 2012

Comissão Examinadora:

---

Profa. Dra. Liliane de Almeida Maia-Orientadora (MAT/UnB)

---

Prof. Dr. Ma To Fu (ICMC/ USP)

---

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros (MAT/UFPB)

---

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva (MAT/UnB)

---

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado (MAT/UnB)

*My way*

*And now the end is near  
And so I face the final curtain  
My friend I'll say it clear  
I'll state my case of which I'm certain  
I've lived a life that's full  
I travelled each and every highway  
And more, much more than this  
I did it my way*

*Regrets I've had a few  
But then again too few to mention  
I did what I had to do  
And saw it through without exemption  
I planned each chartered course  
Each careful step along the byway  
And more, much more than this  
I did it my way*

*Yes there were times I'm sure you knew  
When I bit off more than I could chew  
But through it all when there was doubt  
I ate it up and spit it out, I faced it all  
And I stood tall and did it my way*

*I've loved, I've laughed and cried  
I've had my fill, my share of losing  
And now as tears subside  
I find it all so amusing  
To think I did all that  
And may I say not in a shy way  
Oh no, oh no, not me  
I did it my way*

*For what is a man what has he got  
If not himself then he has not  
To say the things he truly feels  
And not the words of one who kneels  
The record shows I took the blows  
And did it my way  
Yes it was my way*

*Paul Anka*

# Dedicatória

---

À minha irmã de coração  
*Ana Helen Jacob Baumgart*

# Agradecimentos

---

À Deus, pelo dom da sabedoria.

Aos professores da banca examinadora: Ma To Fu, Everaldo Souto de Medeiros, Elves Alves de Barros e Silva, Marcelo Fernandes Furtado e Carlos Alberto Pereira dos Santos, pelas correções e sugestões, que fizeram com acuidade, enriquecendo este trabalho.

À minha orientadora, Liliane de Almeida Maia, por sua amizade, sua confiança no meu potencial e por aceitar me orientar em tão longa distância. Por abrir sua casa para me receber, por seus cuidados e preocupações, como uma verdadeira "mamãe".

Ao Ricardo Ruviaro, por tudo que fez por mim durante estes anos de doutorado. Esta conquista não seria possível sem a sua ajuda. Obrigada!

Aos então coordenadores do Colegiado de Matemática da Unioeste durante o período de elaboração desta, André Vicente e Clézio A. Braga, por sua infindável prestatividade e colaboração em minhas atividades docentes.

Aos então diretores do CCET-Unioeste, Clodis Boscarioli e Anibal Mantovani Diniz, pela compreensão das minhas muitas ausências.

Aos meus alunos pelo apoio, compreensão, amizade, incentivo e chocolates recebidos durante o período. Em especial, ao meu primeiro orientando de monografia, Daniel Zampieri Loureiro, por sua eterna torcida, à Carla Melli Tambarussi, pelo apoio e incentivo incondicionais, e à Franciele Taís Oliveira, pelo apoio e pela elaboração dos gráficos deste trabalho.

À família Danzmann (Gilberto, Nazaré, Thiago), à família Klein (Renato e Eneida), à família Pasqual (Davi e Olívia) e à Eliete N. Pereira, que me acolheram em suas casas e me ajudaram na logística das minhas viagens à Brasília.

Ao meu irmão Cristiano e minha cunhada Michelle, pelos finais de semana de descanso em sua casa.

Aos amigos sempre presentes, Jhone Caldeira Silva e Sandra "Macu" Moreira Neto, pela torcida e pelas orações.

A todos que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho. Obrigada!

# Resumo

---

Neste trabalho estudamos o seguinte sistema de equações Schrödinger não-linear fortemente acoplado em  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 3$ :

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)} u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)} v + \lambda u \end{cases}$$

sob quatro diferentes condições na função  $a(x)$ . Usamos métodos variacionais para obter soluções não-nulas para o sistema.

Palavras-Chaves: Teorema do Passo da Montanha, variedade de Pohozaev, sistema de Schrödinger, sequência de Cerami.

# Abstract

---

In this work we study the following coupled system of nonlinear Schrödinger equations on  $\mathbb{R}^N$ , with  $N \geq 3$ :

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)} u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)} v + \lambda u \end{cases}$$

under four different conditions on the function  $a(x)$ . We use variational methods in order to obtain non-trivial solutions for the system.

Keywords: Mountain Pass Theorem, Pohozaev manifold, Schrödinger system, Cerami sequence.



# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Caracterização de solução para sistema autônomo</b>	<b>7</b>
1.1 Resultados preliminares . . . . .	7
1.2 Solução radial via Teorema do Passo da Montanha . . . . .	11
1.3 Solução minimizante restrita à vínculo . . . . .	26
1.4 Equivalência entre as soluções encontradas . . . . .	30
<b>2 Solução para um sistema radial</b>	<b>38</b>
2.1 Resultados preliminares . . . . .	39
2.2 Condição de Cerami . . . . .	42
2.3 Existência de solução positiva . . . . .	43
<b>3 Solução para sistema não-autônomo via comparação de níveis de energia</b>	<b>44</b>
3.1 Resultados preliminares . . . . .	45
3.2 Existência e limitação de sequências de Cerami . . . . .	46
3.3 Resultado de compacidade . . . . .	48
3.4 Existência de solução . . . . .	61
<b>4 Solução para sistema não-autônomo via Teorema de Linking</b>	<b>65</b>
4.1 Variedade de Pohozaev . . . . .	71
4.2 O resultado de não existência . . . . .	77
4.3 Resultado de existência . . . . .	88
4.4 Solução não-nula para o sistema . . . . .	100

<b>A Resultados Auxiliares</b>	<b>103</b>
A.1 Teorema de Ghoussoub-Preiss . . . . .	103
A.2 Propriedades da função baricentro . . . . .	104
A.3 Limitação das sequências de Cerami . . . . .	106
A.4 Lema de Splitting . . . . .	110
A.5 Teorema de Linking . . . . .	116
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>121</b>

# Introdução

---

Nos últimos anos, a óptica não-linear tem atraído muito a atenção de físicos e matemáticos, por sua aplicabilidade no entendimento do comportamento da transmissão da luz em altas velocidades. Em especial, se destacam os sólitons ópticos espaciais, que possuem a interessante propriedade de manter sua forma durante a propagação.

A equação de Schrödinger, apesar de representar bem a auto-interação de um raio de luz através de um meio, não leva em consideração as possíveis interações do raio com o próprio meio. A passagem de um raio de luz, ao longo de uma fibra óptica, com duas componentes ortogonalmente polarizadas decompõe o raio em dois, fenômeno conhecido como birrefração. Para melhor representar esta situação, em [50], os autores consideraram um sistema de equações de Schrödinger fracamente acoplado. Assim, como observou S. V. Manakov em [35], vetores de sólitons foram gerados, isto é, ondas solitárias com múltiplas componentes acopladas e ainda com as propriedades de sólitons escalares. Cristais fotorefrativos são o material mais utilizado para tais experimentos pois, entre outras propriedades, mudam seus índices de refração durante a passagem da luz, o que faz com que a onda se propague sem alteração em sua forma. Entretanto, é necessário levar em consideração o efeito de saturação do material, quando o índice de refração do mesmo chega ao seu valor máximo e se estabiliza [32, 46, 50].

O sistema não-linear de equações de Schrödinger fracamente acoplado

$$\begin{cases} i\varphi_t + \Delta\varphi + \frac{\alpha(|\varphi|^2 + |\psi|^2)}{1 + (|\varphi|^2 + |\psi|^2)/I_0}\varphi = 0 \\ i\psi_t + \Delta\psi + \frac{\alpha(|\varphi|^2 + |\psi|^2)}{1 + (|\varphi|^2 + |\psi|^2)/I_0}\psi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

representa a propagação de um raio com duas componentes mutualmente incoerentes num meio saturado na aproximação isotrópica, onde  $\varphi$  e  $\psi$  representam as amplitudes

das componentes do raio,  $\alpha$  é a força da não-linearidade,  $I_0$  é o parâmetro de saturação e a expressão  $(|\varphi|^2 + |\psi|^2)$  representa a intensidade total criada por todas as componentes incoerentes do raio de luz. Considerando-se soluções estacionárias  $\varphi(x, t) = \sqrt{\alpha}u(x)e^{i\lambda_1 t}$  e  $\psi(x, t) = \sqrt{\alpha}v(x)e^{i\lambda_2 t}$ , com  $u$  e  $v$  funções reais e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  constantes de propagação, obtém-se o seguinte sistema elíptico fracamente acoplado

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u &= \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}u \\ -\Delta v + \lambda_2 v &= \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}v, \end{cases} \quad (2)$$

onde  $s = 1/\alpha I_0$ ,  $N \geq 2$ , e  $u$  e  $v$  pertencem a  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

Análises numéricas para o sistema (2) foram feitas em [15, 21, 32, 37] quando  $N = 1$ , e o caso discreto foi estudado em [38], sempre com  $s > 0$ . Para  $s = 0$  sabe-se que, sob certas condições de parâmetros, existem soluções vetoriais de energia mínima [4, 9, 25, 33, 42]. Em [34], os autores estudaram a existência de soluções vetoriais de energia mínima para tal sistema.

Motivados pelo trabalho [3] de A. Ambrosetti, G. Cerami e D. Ruiz, onde um sistema de equações não-autônomas acoplado com não-linearidade subcrítica foi estudado sob diversas condições, decidimos aqui estudar o seguinte sistema fortemente acoplado com não-linearidade assintoticamente linear no infinito, em  $\mathbb{R}^N$  com  $N \geq 3$ :

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)}u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)}v + \lambda u. \end{cases} \quad (3)$$

Devido ao termo  $\lambda$  de acoplamento, se uma das entradas do vetor solução  $(u, v)$  é nula, então necessariamente a outra entrada também é nula. Assim, mesmo que  $u_0$  seja uma solução não nula da equação

$$-\Delta u + u = \frac{u^3}{1 + (s + a(x))u^2},$$

os vetores  $(u_0, 0)$  e  $(0, u_0)$  não serão soluções do sistema (3).

Sempre que possível, buscaremos soluções 'ground state', isto é, soluções que tenham o nível de energia mínimo entre todas as soluções possíveis, pois conforme afirmam A.

Ambrosetti e E. Colorado em [4], as únicas candidatas a ondas estacionárias estáveis são as soluções 'ground state'.

O problema de encontrar soluções para a equação mais geral em  $\mathbb{R}^N$

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u), \quad (4)$$

com  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ , tem sido extensivamente estudado, sob diversas condições no potencial  $V$  e no peso  $K$ . Em 1983, num trabalho pioneiro, H. Berestycki e P. Lions [10] estudaram a equação autônoma  $-\Delta u + mu = f(u)$ , em  $\mathbb{R}^N$ . Eles mostraram a existência de uma solução para tal equação, utilizando minimização restrita à vínculo, quando  $f$  tem crescimento subcrítico no infinito.

Em [49], C. Stuart e H. Zhou mostraram a existência de uma solução radial positiva para a equação  $-\Delta u + \lambda u = f(|x|, u(x))u(x)$ , onde a não-linearidade  $f$  é assintoticamente linear.

Assumindo que  $V$  e  $K$  são periódicas, citamos os trabalhos de S. Alama e Y. Li [1] e V. Coti-Zelati e P. Rabinowitz [20]. Destacamos também o trabalho de P. Bartolo, V. Benci e D. Fortunato [8], onde problemas não lineares com 'ressonância forte' no infinito foram estudados. Citamos ainda os trabalhos de D. Costa e H. Tehrani [19] e G. Li e H.-S. Zhou, [30] onde a equação  $-\Delta u + \lambda u = f(x, u)u$  foi estudada, assumindo-se o comportamento assintoticamente linear da função  $f$ , além do trabalho [7] de A. Bahri e Y. Li, onde a equação  $-\Delta u + u - q(x)|u|^{p-1}u = 0$ , com  $0 < p < \frac{N+2}{N-2}$ ,  $N \geq 3$  foi estudada.

Assim como a equação (4), o sistema (3) e suas variantes tem sido alvo de diversos trabalhos ao longo dos anos. Em 1984, H. Brezis e E. Lieb [13], utilizando métodos de minimização com vínculo, provaram a existência de uma solução  $(u, v) \neq (0, 0)$  para uma classe de sistemas autônomos, dentre os quais se encontra o nosso, quando  $a(x) \equiv 0$ . Em domínios limitados, D. Costa e C. Magalhães estudaram sistemas elípticos subquadráticos e não-cooperativos ([17, 18], respectivamente). Em [26], M. Furtado, L. Maia e E. Silva estudaram um sistema similar à (3), não acoplado e com uma não-linearidade superlinear, enquanto nossa não-linearidade é assintoticamente linear. Temos ainda nosso trabalho motivador, [3], além de [2], de A. Ambrosetti, onde foi verificada a existência de solução para um sistema elíptico em  $\mathbb{R}^N$ , via métodos de perturbação.

Trabalharemos aqui sempre com sequências de Cerami, ao invés de sequências de Palais-Smale pois, pela estrutura de nosso sistema, como a não-linearidade satisfaz a condição de não-quadraticidade introduzida por D. Costa e C. Magalhães em [16], podemos utilizar um argumento de C. Stuart e H. Zhou, encontrado em [49], para mostrar que toda sequência de Cerami possui uma subsequência limitada.

Este trabalho está assim estruturado: no Capítulo 1, estudaremos o sistema autônomo em  $\mathbb{R}^N$ :

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}v + \lambda u. \end{cases} \quad (5)$$

Mostraremos que este possui uma solução positiva radial de energia mínima. Tal solução pode ser encontrada via minimização com vínculo ou via Teorema do Passo da Montanha. Para isto, adaptaremos as ideias de L. Jeanjean e K. Tanaka [27] para mostrar que  $c_\infty = \inf_{u \in \mathcal{P}_\infty} I_\infty(u)$ , onde  $c_\infty$  é o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha e  $\mathcal{P}_\infty$  é a variedade de Pohozaev associada ao sistema.

No Capítulo 2, estudaremos o sistema (3) assumindo que  $a$  é uma função radial. Fazendo uso das imersões compactas de  $H^1(\mathbb{R}^N)$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , para  $2 < p < 2^*$ , conseguiremos mostrar que a condição de Cerami é satisfeita e obteremos uma solução não-nula via Teorema do Passo da Montanha.

Já no Capítulo 3, estudamos o caso de  $a$  não mais radial, mas satisfazendo as condições:

(A1)  $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N$ ;

(A2)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 0$ ;

(A3) existe uma constante  $s_0 > 0$  tal que

$$0 < s_0 < s + a(x) < s \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Com estas condições os funcionais  $I$  e  $I_\infty$  associados aos sistemas (3) e (5), respectivamente, obedecerão à relação  $I(u, v) \leq I_\infty(u, v), \forall (u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ . Nesta situação, de um problema elíptico em  $\mathbb{R}^N$ , o funcional  $I$  pode não mais satisfazer a condição de Cerami para todo nível  $c$ . Para superar esta falta de compacidade, provaremos um resultado de concentração de compacidade, introduzido por P. L. Lions [31], na versão conhecida como 'Splitting', introduzida por M. Struwe [48], que descreve as sequências de Cerami num nível  $c$ . Assim, numa faixa específica,  $(0, c_\infty)$ , teremos satisfeita a condição de Cerami. Mostraremos que o nível  $c$  do Teorema do Passo da Montanha pertence à tal faixa pela construção de um caminho específico, gerado a partir da solução 'ground state' do problema no infinito (5).

No Capítulo 4 apresentaremos o principal resultado de nosso trabalho. Vamos impor novas condições sobre a função  $a$ , de maneira que os funcionais  $I$  e  $I_\infty$  agora satisfaçam a relação  $I_\infty(u, v) \leq I(u, v) \ \forall (u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ . As condições serão:

- (A1)  $a \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ , com  $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} a(x) > 0$ ;
- (A2)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty > \lambda$ ;
- (A3)  $\nabla a(x) \cdot x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$ , sendo que a desigualdade é estrita num conjunto de medida não nula de  $\mathbb{R}^N$ ;
- (A4)  $a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} < a_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^N$ ;
- (A5)  $\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$ , onde  $H$  representa a matriz Hessiana da função  $a$ .

Ao procurarmos referências para o caso escalar nestas condições, com a não-linearidade sendo assintoticamente linear no infinito, não conseguimos encontrar resultados sobre a mesma. Passamos então ao estudo da equação em  $\mathbb{R}^N$

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u). \quad (6)$$

Inspirados pelo trabalho [6] de A. Azzollini e A. Pomponio, no qual foi estudada a equação  $-\Delta u + V(x)u = g(u)$ , com  $g$  nas condições do artigo [10] e  $V$  em condições equivalentes às nossas para  $a$ , trabalharemos numa variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$  para a equação (6) e mostraremos que  $p = \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u)$  não é um nível crítico para o funcional  $I$ . Isto nos motivará a procurar por soluções em níveis mais altos de energia. Novamente, provaremos um resultado de concentração de compacidade para descrever as sequências de Cerami e garantir a compacidade numa faixa, agora  $(c_\infty, 2c_\infty)$ .

Como o nível minimax  $c$  do Teorema do Passo da Montanha coincide com  $p$ , (de fato, ambos coincidem com  $c_\infty$ ) e tal nível não é atingido, faremos uso do Teorema de Linking para obter a solução. Para construir a estrutura de linking, utilizaremos novamente a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$ , juntamente com uma nova restrição, dada pela função *baricentro*, similarmente à construção feita em [3], onde foi utilizada a variedade de Nehari.

Para facilitar a compreensão das novas técnicas apresentadas neste capítulo, optamos por apresentar a solução do caso escalar (6), e somente comentar as devidas adaptações para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= a(x) \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 + v^2)} u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= a(x) \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 + v^2)} v + \lambda u. \end{cases} \quad (7)$$

---

Observamos que provaremos nossos resultados, no caso escalar, para uma classe de funções  $f$ , nas quais o caso particular  $f(s) = \frac{s^3}{1+s^2}$  se enquadra. Ainda, ressaltamos que não faremos uso de condições sobre o comportamento da função  $\frac{f(s)}{s}$ , como crescente ou não-decrescente, geralmente utilizadas em problemas semelhantes, para ser possível fazer uso das propriedades da variedade de Nehari.



# Caracterização de solução para sistema autônomo

Neste capítulo, estudaremos o seguinte sistema em  $\mathbb{R}^N$  com  $N \geq 3$ ,

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u &= \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)}v + \lambda u \end{cases}$$

onde assumimos que as constantes  $s$  e  $\lambda$  satisfazem  $0 < s < 1$  e  $0 < \lambda < 1$ . Inicialmente, trabalhando somente no espaço das funções radiais, mostraremos que tal sistema possui uma solução não-nula radial, via Teorema do Passo da Montanha (ver [5]). Em seguida, obteremos uma solução (a princípio não radial) de energia mínima, via minimização restrita à vínculo, e seguindo as ideias de Jeanjean e Tanaka [27], faremos uma caracterização desta solução de energia mínima. Concluiremos este capítulo mostrando que o sistema  $(P)$  possui uma solução positiva radial de energia mínima, obtida pelo Teorema do Passo da Montanha.

## 1.1 Resultados preliminares

Trabalharemos em  $E = H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$  com a norma

$$\|(u, v)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + v^2 dx.$$

Também usaremos a notação

$$\|(u, v)\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p + |v|^p dx \right)^{1/p}, \forall p \in [1, \infty)$$

para a norma usual em  $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N)$ .

O seguinte funcional está associado ao sistema (P):

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + v^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u, v) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \quad (1.1)$$

onde

$$H(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)),$$

e a derivada do funcional  $I$  acima é dada por

$$\nabla I(u, v)(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi + u\varphi + v\psi - \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} (u\varphi + v\psi) - \lambda(v\varphi + u\psi) dx.$$

Procuraremos soluções de (P), que serão os pontos críticos  $(u, v)$  do funcional  $I$ , com  $u, v > 0$  e  $u(x), v(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Inicialmente, mostraremos que caso exista uma solução  $(u, v)$  positiva, então a mesma será radial. Para isto, usaremos o seguinte resultado de Busca e Sirakov ([14], Teorema 2):

$$\text{Consideremos o sistema: } \begin{cases} \Delta u + g(u, v) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \Delta v + f(u, v) = 0, & u(x), v(x) \rightarrow 0 \text{ se } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

com  $u$  e  $v$  positivas e  $f, g \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty), \mathbb{R})$ .

Supondo que:

- i)  $\frac{\partial g(u, v)}{\partial v}$  e  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \geq 0$ ,  $\forall (u, v) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ ;
- ii)  $\frac{\partial g(0, 0)}{\partial u}$  e  $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial v} < 0$ ;
- iii)  $\det A > 0$ , em que  $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} (0, 0)$ ;

temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.** *Assuma (i), (ii), (iii). Então existem pontos  $x_0$  e  $x_1 \in \mathbb{R}^N$  tais que  $u(x) = u(|x - x_0|)$  e  $v(x) = v(|x - x_1|)$ . Além disto,  $\frac{du}{dr_1} < 0$  e  $\frac{dv}{dr_2} < 0$ ,  $\forall r_1 = |x - x_0| > 0$  e  $r_2 = |x - x_1| > 0$ .*

**Observação 1.1.** *Se  $x_0 = x_1$ , então  $u$  e  $v$  são simétricas em relação ao mesmo ponto.*

As condições para termos  $x_0 = x_1$  são:

- $\frac{\partial g(u, v)}{\partial v}$  ou  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$  é positiva numa vizinhança de  $(0, 0)$ , exceto possivelmente em  $\{u = 0\} \cup \{v = 0\}$ ; ou
- $\frac{\partial g(u, v)}{\partial v}$  ou  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}$  não depende de uma das variáveis e é não-nula em qualquer vizinhança de  $(0, 0)$ .

Adequando o sistema  $(P)$  às condições do Teorema 1.1 temos:

$$g(u, v) = -u + \lambda v + \left( \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} \right) u$$

$$f(u, v) = -v + \lambda u + \left( \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} \right) v.$$

- Verificando (i):

$$\frac{\partial g(u, v)}{\partial v} = \lambda + u \left( \frac{[1 + s(u^2 + v^2)] 2v - (u^2 + v^2) 2vs}{(1 + s(u^2 + v^2))^2} \right) = \lambda + \frac{2uv}{(1 + (u^2 + v^2))^2} \geq 0$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \lambda + \frac{2uv}{(1 + (u^2 + v^2))^2} \geq 0,$$

portanto (i) é verificada, pois estamos supondo que  $u, v > 0$ .

- Verificando (ii):

$$\frac{\partial g(0, 0)}{\partial u} : \frac{\partial g(u, v)}{\partial u} = -1 + \left( \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} \right) + \frac{2u^2v}{(1 + s(u^2 + v^2))^2},$$

$$\text{portanto, } \frac{\partial g(0, 0)}{\partial u} = -1 < 0.$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial v} : \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = -1 + \left( \frac{u^2 + v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} \right) + \frac{2uv^2}{(1 + s(u^2 + v^2))^2},$$

$$\text{portanto, } \frac{\partial f(0, 0)}{\partial v} = -1 < 0, \text{ e (ii) está verificada.}$$

- Verificando (iii):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} (0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\det A = 1 - \lambda^2 > 0$ , pois temos por hipótese que  $0 < \lambda < 1$ , e (iii) é verificada.

- Verificando a condição para que  $x_0 = x_1$ :

$\frac{\partial g(u, v)}{\partial v} = \lambda + \frac{2uv}{(1 + s(u^2 + v^2))^2}$  é sempre positiva numa vizinhança de  $(0, 0)$ , pois  $\lambda > 0$  e estamos tomando  $u, v > 0$ .

Portanto, pelo Teorema 1.1, a solução  $(u, v)$  de  $(P)$ , com  $u, v > 0$ , caso exista, será radial. Isto nos motiva, a partir de agora, a procurarmos soluções para  $(P)$  em  $E_{rad} = H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \times H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$  e usaremos em  $E_{rad}$  a norma

$$\|(u, v)\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + v^2 dx.$$

Mostraremos a seguir que a condição de não-quadraticidade introduzida por Costa e Magalhães em [16] é verificada:

**Definição 1.2.** Dizemos que  $F(u, v)$  satisfaz a condição de não-quadraticidade (NQ) se, para todo par  $(u, v) \in E$ , temos:

- $\lim_{|(u, v)| \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \nabla F(u, v)(u, v) - F(u, v) = +\infty$
- $\frac{1}{2} \nabla F(u(x), v(x))(u(x), v(x)) - F(u(x), v(x)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$

Mostraremos que a função  $F(u, v)$ , definida por

$$F(u, v) = H(u, v) + \lambda uv, \tag{1.2}$$

satisfaz tal condição, seguindo os argumentos feitos em [36]. Observamos que utilizaremos tal função  $F(u, v)$  várias vezes ao longo das próximas seções.

Primeiramente mostraremos o item (b): Consideremos

$$h(t) := \frac{t^2}{2} \frac{(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)} - \frac{t^2}{2s} (u^2 + v^2) + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + t^2 s(u^2 + v^2)), \tag{1.3}$$

definida para todo  $t \geq 0$ . Temos então que

$$h'(t) = \frac{t(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)} - \frac{t^3(u^2 + v^2)^2}{1 + st^2(u^2 + v^2)},$$

o que implica

$$h'(t) < 0 \Leftrightarrow t > 1;$$

$$h'(t) > 0 \Leftrightarrow t < 1;$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1,$$

e portanto,  $h(t) \leq h(1), \forall t > 0$ . Mas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \nabla F(u(x), v(x))(u(x), v(x)) - F(u(x), v(x)) \\ = & \frac{1}{2} \left( \frac{(u^2 + v^2)u}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda v, \frac{(u^2 + v^2)v}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda u \right) (u, v) - F(u, v) \\ = & \frac{1}{2} \left[ \frac{(u^2 + v^2)u^2}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda uv + \frac{(u^2 + v^2)v^2}{1 + s(u^2 + v^2)} + \lambda uv \right] - F(u, v) \\ = & \frac{1}{2} \left[ \frac{(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)} + 2\lambda uv \right] - \frac{u^2 + v^2}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) - \lambda uv \\ = & \frac{1}{2} \frac{(u^2 + v^2)^2}{1 + s(u^2 + v^2)} - \frac{u^2 + v^2}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) \\ = & h(1) > h(0) = 0, \forall (u, v) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Portanto, este item é verificado.

Ainda, fazendo a mudança de coordenadas  $u^2 + v^2 = z^2$ , temos para todo  $z^2 > 0$  que

$$\frac{1}{2} \frac{z^4}{1 + sz^2} - \frac{z^2}{2s} \geq -\frac{1}{2s^2},$$

o que implica

$$\frac{1}{2} \frac{z^4}{1 + sz^2} - \frac{z^2}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + sz^2) \geq -\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + sz^2) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} +\infty,$$

e portanto

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \frac{z^4}{1 + sz^2} - \frac{z^2}{2s} + \frac{1}{2s^2} \ln(1 + sz^2) \right] = +\infty.$$

Assim,  $F$  satisfaz a condição  $(NQ)$ .

## 1.2 Solução radial via Teorema do Passo da Montanha

Nesta seção, mostraremos primeiramente que o funcional  $I$  satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha e também a condição de Cerami  $(Ce)$  em  $E_{rad}$ . Com isso, encontraremos uma solução radial para o sistema  $(P)$ . Denotaremos por  $X$  um

espaço de Banach.

**Definição 1.3.** *Um funcional  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz a condição de Cerami (Ce) se toda sequência  $(z_n) \subset X$  com  $|I(z_n)| < M$  e  $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$  possui subsequência convergente  $z_{n_k} \rightarrow z \in X$ . Um funcional  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz a condição de Cerami no nível  $c$ ,  $(Ce)_c$ , se toda sequência  $(z_n) \subset X$  com  $I(z_n) \rightarrow c$  e  $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$  possui subsequência convergente  $z_{n_k} \rightarrow z \in X$ .*

Enunciamos agora o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [8] ou [36], Teorema 1.1.3.

**Teorema 1.4.** *(Teorema do Passo da Montanha) Seja  $X$  um espaço de Banach real e  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  um funcional satisfazendo (Ce) tal que  $I(0) = 0$ . Suponha que:*

$(\mathcal{I}_1)$  *existem constantes  $\alpha, \rho > 0$  tais que  $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$ ,*

$(\mathcal{I}_2)$  *existe  $e \in X \setminus \partial \overline{B_\rho}$  tal que  $I(e) \leq 0$ .*

*Além disto, considere o conjunto  $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X); \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}$ . Então*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

*é valor crítico de  $I$ .*

Verificaremos que as condições deste teorema são válidas em  $E_{rad}$ . Trabalharemos então com o nível  $c_r$ , dado por

$$c_r = \inf_{\gamma \in \Gamma_r} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

onde  $\Gamma_r := \{\gamma \in C([0, 1], E_{rad}); \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}$ .

**Proposição 1.5.** *O funcional  $I$  satisfaz as condições  $(\mathcal{I}_1)$  e  $(\mathcal{I}_2)$ .*

*Demonstração.* Facilmente verificamos que  $I(0) = 0$ . Veremos agora que  $(\mathcal{I}_1)$  é satisfeita. Temos que

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H(u, v) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx,$$

onde

$$H(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)).$$

Fazendo a mudança de variáveis,  $u^2 + v^2 = z^2$ , obtemos

$$H(z) = \frac{z^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + sz^2)$$

e

$$\frac{H(z)}{z^2} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s^2} \frac{\ln(1 + sz^2)}{z^2}.$$

Calculando o limite, quando  $z \rightarrow 0^+$ , temos

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{H(z)}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2s^2} \frac{\ln(1 + sz^2)}{z^2} \right) = 0.$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < z < \delta$ , então

$$\left| \frac{H(z)}{z^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, temos que para todo  $z^2 > 0$ ,  $\ln(1 + sz^2) \leq sz^2$ , o que implica

$$|H(z)| \leq z^2 \left( \frac{1}{s} \right).$$

Segue que, se  $z \geq \delta$ , temos  $z/\delta \geq 1$ , o que implica  $\frac{z^2}{\delta^2} \leq \frac{z^p}{\delta^p}$ , onde  $2 < p < 2^*$ . Assim

$$z^2 \left( \frac{1}{s} \right) \leq z^p \left( \frac{1}{s} \right) \frac{\delta^2}{\delta^p} = M(\varepsilon) z^p, M(\varepsilon) > 0.$$

Temos então que, dado  $2 < p < 2^*$ ,

$$|H(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} z^2 + M(\varepsilon) z^p, \forall z > 0 \quad (1.4)$$

em que  $z^2 = u^2 + v^2$ . Voltando então à expressão de  $I(u, v)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} I(u, v) &= \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H(u, v) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2) dx - M \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2) dx - M \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \|(u, v)\|^2 - M \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx - \frac{\lambda}{2} \|(u, v)\|^2 \\ &= \left( \frac{1 - \lambda - \varepsilon}{2} \right) \|(u, v)\|^2 - M \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx. \end{aligned}$$

Ainda, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} 2^{p/2} (u^p + v^p) dx \leq C_1 \|u\|^p + C_2 \|v\|^p \\ &\leq C_1 \|(u, v)\|^p + C_2 \|(u, v)\|^p \\ &\leq C \|(u, v)\|^p. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$I(u, v) \geq \frac{1 - \lambda - \varepsilon}{2} \|(u, v)\|^2 - MC \|(u, v)\|^p.$$

Desse modo, seja  $0 < \rho < 1$  tal que

$$\rho^p < \frac{1}{2MC} \left( \frac{1 - \lambda - \varepsilon}{2} \right) \rho^2,$$

então, se  $\|(u, v)\| = \rho$  e  $0 < \varepsilon < 1 - \lambda$ , obtemos

$$\begin{aligned} I(u, v) &\geq \left( \frac{1 - \lambda - \varepsilon}{2} \right) \rho^2 - MC \frac{1}{2MC} \left( \frac{1 - \lambda - \varepsilon}{2} \right) \rho^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \varepsilon - \lambda}{2} \right) \rho^2 = \frac{1}{4} (1 - \lambda - \varepsilon) \rho^2 \\ &= \alpha > 0 \end{aligned}$$

e  $(\mathcal{I}_1)$  está verificada.

Verificaremos agora  $(\mathcal{I}_2)$ , seguindo ideias de [36]. Suponhamos que  $R > 0$ . Consideremos  $\varphi_R$  solução do problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta \varphi &= \alpha_R \varphi \text{ em } B_R(0) \\ \varphi &\equiv 0, \partial B_R(0). \end{cases}$$

Sabemos que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $R_0(\varepsilon)$  tal que se  $R > R_0(\varepsilon)$  então  $\alpha_R < \varepsilon$ , pois  $\alpha_R$  decai a zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Também sabemos que  $\varphi_R$  pertence à  $E_{rad}$ . Então, para  $t > 0$ , consideramos  $u_R = t\varphi_R$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned} I(u_R, 0) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} t^2 |\nabla \varphi_R|^2 + t^2 \varphi_R^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^2 \varphi_R^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + st^2 \varphi_R^2) dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_R|^2 + \varphi_R^2 \left( 1 - \frac{1}{s} \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2s^2} \ln(1 + st^2 \varphi_R^2) dx. \end{aligned}$$



Dado  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $\tau = \tau(R, s, k)$  tal que se  $\varphi_R^2(x) \geq \tau^2$  então

$$\ln(1 + st^2(\varphi_R^2)) \leq \frac{st^2}{k}(\varphi_R)^2, \forall t \geq 1.$$

Sejam  $A_{k,s} = \{x \in \mathbb{R}^N; \varphi_R^2(x) < \tau^2\}$  e  $B_{k,s} = \{x \in \mathbb{R}^N; \varphi_R^2(x) \geq \tau^2\}$ . Desse modo temos que:

$$\begin{aligned} I(u_R, 0) &= \frac{t^2}{2} \int_{A_{k,s}} |\nabla \varphi_R|^2 + \varphi_R^2 \left(1 - \frac{1}{s}\right) dx + \frac{1}{2s^2} \int_{A_{k,s}} \ln(1 + st^2 \varphi_R^2) dx \\ &+ \frac{t^2}{2} \int_{B_{k,s}} |\nabla \varphi_R|^2 + \varphi_R^2 \left(1 - \frac{1}{s}\right) dx + \frac{1}{2s^2} \int_{B_{k,s}} \ln(1 + st^2 \varphi_R^2) dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_{B_R(0)} |\nabla \varphi_R|^2 + \varphi_R^2 \left(1 - \frac{1}{s}\right) dx \\ &+ \int_{A_{k,s}} \frac{1}{2s^2} \ln(1 + st^2 \varphi_R^2) dx + \int_{B_{k,s}} \frac{1}{2s^2} \ln(1 + st^2 \varphi_R^2) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \int_{B_R(0)} \varphi_R^2 \left(\alpha_R + 1 - \frac{1}{s}\right) dx + \int_{A_{k,s}} \frac{1}{2s^2} \ln(1 + st^2 \varphi_R^2) dx \\ &+ \int_{B_{k,s}} \frac{1}{2s^2} \frac{st^2 \varphi_R^2}{k} dx \\ &= \frac{t^2}{2} \left( \int_{B_R(0)} \varphi_R^2 \left(\alpha_R + 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk}\right) dx + \frac{1}{t^2 s^2} \int_{A_{k,s}} \ln(1 + st^2 \varphi_R^2) dx \right) \\ &\leq \frac{t^2}{2} \left( \|\varphi_R\|^2 \left(\alpha_R + 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk}\right) + \frac{1}{t^2 s^2} \ln(1 + st^2 \tau^2) |A_{k,s}| \right) \end{aligned}$$

onde  $|A_{k,s}|$  representa a medida do conjunto  $A_{k,s}$ . Tomemos  $k > 0$  suficientemente grande de modo que  $1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk} < 0$ . Fixemos  $R > 0$  suficientemente grande de modo que  $\alpha_R + 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk} < 0$ . Por último, escolhamos  $t \geq 1$  suficientemente grande tal que

$$\|\varphi_R\|_2^2 \left(\alpha_R + 1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{sk}\right) + \frac{1}{t^2 s^2} \ln(1 + st^2 \tau^2) |A_{k,s}| < 0$$

e  $\|\varphi_R\| > 1$ .

Desse modo, teremos que  $I(u_R, 0) < 0$ , com  $\|(u_R, 0)\| = t\|\varphi_R\| > \rho$  e tomando  $e = (u_R, 0)$ , verificamos  $(\mathcal{I}_2)$ .  $\square$

**Observação 1.2.** Como o funcional  $I$  satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha, pelo Princípio Variacional de Ekeland (vide [22]), temos garantida a existência de sequências de Cerami no nível  $c_r$ .

A seguir, mostraremos que o funcional  $I$  satisfaz a condição de Cerami ( $Ce$ ) em  $E_{rad}$ . Para isto, vamos dividir a prova deste fato nos dois seguintes lemas:

**Lema 1.6.** *Seja  $(z_n) = (u_n, v_n) \subset E_{rad}$  uma sequência limitada tal que  $|I(z_n)| \leq M$  e  $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ . Então existe  $z \in E_{rad}$  tal que  $\|z_n - z\| \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Nestas condições, temos que  $I'(z_n) \rightarrow 0$  e, a menos de subsequências, temos:

- a)  $u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v$  em  $E_{rad}$  e em  $E$ ;
- b)  $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$ ;
- c)  $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$  em  $L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$ ,

pelas imersões compactas  $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $2 < p < 2^*$  e  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$ , com  $1 \leq q < 2^*$ .

Temos que

$$I'(z_n)z_n \rightarrow 0, \quad (1.5)$$

pois  $|I'(z_n)z_n| \leq \|I'(z_n)\|\|z_n\|$ , e por hipótese  $(z_n)$  é uma sequência limitada com  $I'(z_n) \rightarrow 0$ .

Mostraremos agora que

$$I'(z)z = 0, \quad (1.6)$$

onde  $z = (u, v)$  é tal que  $z_n \rightharpoonup z$ . Para isto, basta mostrar que  $I'(z) = 0$ , isto é, que  $z$  é ponto crítico de  $I$ . Visto que  $z_n \rightharpoonup z$ , já temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I'(z_n)\varphi = 0,$$

para qualquer  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Temos ainda que

$$I'(z)\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} I'(z_n)\varphi.$$

De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I'(z_n)\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \nabla z_n \nabla \varphi + z_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) \varphi dx \right),$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla z_n \nabla \varphi + z_n \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla z \nabla \varphi + z \varphi dx,$$

pela definição da convergência fraca  $z_n \rightharpoonup z$ . Resta mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z) \varphi dx.$$

Para isto, usaremos o seguinte resultado, encontrado em [29], Lema 4.8:

**Lema 1.7.** *Sejam  $1 < p < \infty$  e  $(f_n)$  uma sequência limitada em  $L^p(\mathbb{R}^N)$  tal que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  qtp  $x \in \mathbb{R}^N$ . Então  $f_n \rightharpoonup f$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$ .*

Façamos  $f_n(x) = \nabla F(z_n(x))$ . Como  $u_n \rightarrow u$  e  $v_n \rightarrow v$  em  $L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$ , temos que  $u_n(x) \rightarrow u(x)$  e  $v_n(x) \rightarrow v(x)$  qtp  $x \in \mathbb{R}^N$ . Portanto,  $f_n(x) = \nabla F(z_n(x)) \rightarrow \nabla F(z(x)) = f(x)$  qtp  $x \in \mathbb{R}^N$ .

Tomando  $2 < p < 2^*$  e sabendo que  $\frac{a}{1+sa} < \frac{1}{s}$ , para todo  $a \geq 0$  segue que

$$\begin{aligned} \|\nabla F(z_n)\|_p^p &:= \|F_u(z_n)\|_p^p + \|F_v(z_n)\|_p^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{(u_n^2 + v_n^2)u_n}{1 + s(u_n^2 + v_n^2)} + \lambda v_n \right|^p dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{(u_n^2 + v_n^2)v_n}{1 + s(u_n^2 + v_n^2)} + \lambda u_n \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left( \left| \frac{u_n}{s} \right| + \lambda |v_n| \right)^p + \left( \left| \frac{v_n}{s} \right| + \lambda |u_n| \right)^p dx, \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p + |v_n|^p dx \leq \tilde{C}, \end{aligned}$$

em que a última desigualdade segue de (b), isto é,  $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$  em  $L^p(\mathbb{R}^N) \times L^p(\mathbb{R}^N)$  para  $2 < p < 2^*$ .

Então, pelo Lema 1.7 temos que  $\nabla F(z_n) \rightharpoonup \nabla F(z)$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , ou equivalentemente

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z) \varphi dx, \forall \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^N) \times L^{p'}(\mathbb{R}^N)$$

em que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Portanto, (1.6) está provado.

Observamos que

$$\|z_n - z\|^2 = \langle z_n - z, z_n - z \rangle = \|z_n\|^2 - 2 \langle z_n, z \rangle + \|z\|^2. \quad (1.7)$$

Mas, de (1.5) segue que

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= I'(z_n)(z_n - z) \\
&= I'(z_n)z_n - I'(z_n)z \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla z_n \nabla z_n + z_n z_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) z_n dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla z_n \nabla z + z_n z dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) z dx \\
&= \|z_n\|^2 - \langle z_n, z \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)(z_n - z) dx,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|z_n\|^2 = o_n(1) + \langle z_n, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)(z_n - z) dx. \quad (1.8)$$

Como  $I'(z) = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= I'(z)(z_n - z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla z \nabla z_n + z z_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z)(z_n - z) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla z \nabla z + z z dx \\
&= \langle z_n, z \rangle - \|z\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z)(z_n - z) dx
\end{aligned}$$

e portanto

$$\|z\|^2 = \langle z_n, z \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z)(z_n - z) dx - o_n(1). \quad (1.9)$$

Substituindo as expressões (1.8) e (1.9) em (1.7), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|z_n - z\|^2 &= \left[ o_n(1) + \langle z_n, z \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)(z_n - z) dx \right] - 2 \langle z_n, z \rangle \\
&\quad + \left[ \langle z_n, z \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z)(z_n - z) dx - o_n(1) \right] \\
&= o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)(z_n - z) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z)(z_n - z) dx. \quad (1.10)
\end{aligned}$$

Visto que  $\nabla F(z) \in L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$  e  $z_n \rightharpoonup z$ , então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z)(z_n - z) dx \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

De (1.10) e (1.11) obtemos

$$\|z_n - z\|^2 = o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)(z_n - z) dx. \quad (1.12)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)(z_n - z) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla F(z_n)(z_n - z)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u_n^2 + v_n^2}{1 + s(u_n^2 + v_n^2)} u_n + \lambda v_n \right| |u_n - u| dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u_n^2 + v_n^2}{1 + s(u_n^2 + v_n^2)} v_n + \lambda u_n \right| |v_n - v| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u_n^2 + v_n^2}{1 + s(u_n^2 + v_n^2)} \right| |u_n| |u_n - u| dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{u_n^2 + v_n^2}{1 + s(u_n^2 + v_n^2)} \right| |v_n| |v_n - v| dx \\
&\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n| |v_n - v| + |v_n| |u_n - u| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{u_n^2}{1 + s u_n^2} + \frac{v_n^2}{1 + s v_n^2} \right) |u_n| |u_n - u| dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{v_n^2}{1 + s v_n^2} + \frac{u_n^2}{1 + s u_n^2} \right) |v_n| |v_n - v| dx \\
&\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n| |v_n - v| + |v_n| |u_n - u|) dx.
\end{aligned}$$

Utilizaremos ainda o seguinte resultado, similar ao encontrado em [39], Lema 2.2:

**Proposição 1.8.** *Para  $q$  tal que  $0 \leq q \leq 2$  existe  $C = C(q)$  tal que  $\frac{w^2}{1 + s w^2} \leq C(q) |w|^q$ , para todo  $w \in \mathbb{R}$ .*

Portanto, tomando  $0 < q < 2$ , temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)(z_n - z) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (C|u_n|^q + C|v_n|^q) |u_n| |u_n - u| dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (C|v_n|^q + C|u_n|^q) |v_n| |v_n - v| dx \\
&\quad + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n| |v_n - v| + |v_n| |u_n - u|) dx.
\end{aligned}$$

Analisando a primeira integral do lado direito

$$C \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q |u_n| |u_n - u| + |v_n|^q |u_n| |u_n - u| dx,$$

podemos aplicar a desigualdade de Hölder com  $p' = q + 2$  e  $p = \frac{p'}{1+q}$  e obter

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{1+q} |u_n - u| dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p'} dx \right)^{\frac{1+q}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \|u_n - u\|_{p'} \|u_n\|_{p'}^{1+q}$$

que converge à zero pois  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $2 < p < 2^*$  e  $\|u_n\|_{p'} \leq \tilde{C} \|u_n\| < M$ . Para a outra integral temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^q |u_n| |u_n - u| dx &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p'} dx \right)^{\frac{q}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= C \|v_n\|_{p'}^q \|u_n\|_{p'} \|u_n - u\|_{p'} \end{aligned}$$

que converge à zero pelo mesmo argumento, mas aqui utilizamos a desigualdade de Hölder com três índices,  $1/p' + 1/p' + q/p' = 1$ , pois  $p' = q + 2$ .

De maneira análoga, podemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|v_n|^q + |u_n|^q) |v_n| |v_n - v| dx \rightarrow 0.$$

Temos então que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)(z_n - z) dx \right| \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n| |v_n - v| + |v_n| |u_n - u| dx + o_n(1).$$

Portanto, voltando à expressão (1.12), temos

$$\begin{aligned} \|z_n - z\|^2 &\leq o_n(1) + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n| |v_n - v| + |v_n| |u_n - u| dx \\ &\leq o_n(1) + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u| |v_n - v| + |u| |v_n - v| \\ &\quad + |v_n - v| |u_n - u| + |v| |u_n - u| dx \end{aligned}$$

Da mesma forma os termos  $\int_{\mathbb{R}^N} |u| |v_n - v| dx$  e  $\int_{\mathbb{R}^N} |v| |u_n - u| dx$  convergem a zero, pois  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$  e  $u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v$  em  $L^2(\mathbb{R}^N)$ , por (a). Assim,

$$\begin{aligned}
\|z_n - z\|^2 &\leq o_n(1) + 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u| |v_n - v| dx \\
&\leq o_n(1) + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 + |v_n - v|^2 dx \\
&= o_n(1) + \lambda \|u_n - u\|_2^2 + \lambda \|v_n - v\|_2^2 \\
&= o_n(1) + \lambda \|z_n - z\|_2^2 \\
&\leq o_n(1) + \lambda \|z_n - z\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|z_n - z\|^2(1 - \lambda) \leq o_n(1),$$

e assim  $z_n \rightarrow z$  em  $E_{rad}$ . □

**Observação 1.3.** *Ressaltamos que tal argumentação só é válida em  $E_{rad}$ , devido às imersões compactas, e não é válida em  $E$ .*

**Lema 1.9.** *Suponha que  $(z_n) \subset E_{rad}$  é tal que  $I(z_n) \rightarrow c_r$  e  $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ . Então  $(z_n)$  possui uma subsequência limitada.*

*Demonstração.* Por contradição, suponhamos que  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ . Definamos  $\hat{z}_n := \frac{z_n}{\|z_n\|}$ . Então  $(\hat{z}_n)$  é uma sequência limitada com  $\|\hat{z}_n\| = 1$  e, conseqüentemente, a menos de subsequências,  $\hat{z}_n \rightharpoonup \hat{z}$ . Assim, um dos dois casos abaixo ocorre:

$$\text{caso 1 : } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{z}_n|^2 dx > 0,$$

$$\text{caso 2 : } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{z}_n|^2 dx = 0.$$

Mostraremos que nenhum dos casos pode ocorrer, obtendo para cada um uma contradição. Começaremos pelo caso 2, seguindo as ideias de [39] e as referências ali utilizadas.

Como  $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ , a menos de subsequências, temos que:

$$\|I'(z_n)\| \|z_n\| < \frac{1}{n}, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

assim,

$$-\frac{1}{n} < I'(z_n)z_n = \|z_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n)z_n dx < \frac{1}{n}. \quad (1.13)$$

**Afirmção 1.** Para todo  $t > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I(tz_n) \leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \nabla F(z_n) z_n - F(z_n) dx$ .

De fato, utilizando novamente a função  $h(t)$ , definida em (1.3), aplicada em  $z_n = (u_n, v_n)$ , temos:

$$h(t) = h_n(t) = \frac{t^2}{2} \nabla F(z_n) z_n - F(tz_n)$$

e

$$h_n(t) \leq h_n(1), \forall t > 0. \quad (1.14)$$

Além disso, por  $(NQ)$  temos que

$$\frac{1}{2} \nabla F(z_n) z_n - F(z_n) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Utilizando (1.13) e (1.14) temos que, dado  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} I(tz_n) &= \frac{t^2}{2} \|z_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(tz_n) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^2}{2} \nabla F(z_n) z_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(tz_n) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2n} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \nabla F(z_n) z_n - F(z_n) dx, \end{aligned} \quad (1.15)$$

o que mostra a afirmação. Além disso, de (1.13), segue que

$$I(z_n) = \frac{1}{2} \|z_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(z_n) dx \geq -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(z_n) z_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(z_n) dx$$

e, assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \nabla F(z_n) z_n - F(z_n) dx \leq I(z_n) + \frac{1}{2n}. \quad (1.16)$$

Desse modo, por (1.15), (1.16) e pelo fato de que  $I(z_n) = c_r + o_n(1)$  obtemos:

$$I(tz_n) \leq \frac{t^2}{2n} + I(z_n) + \frac{1}{2n} = \frac{1+t^2}{2n} + I(z_n), \forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\frac{t^2}{2} \|z_n\|^2 \leq \frac{1+t^2}{2n} + c_r + o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(tz_n) dx \quad (1.17)$$

para  $n$  suficientemente grande e para todo  $t > 0$ .

Façamos  $t_n := \frac{2}{\sqrt{1-\lambda}} \frac{\sqrt{c_r}}{\|z_n\|}$ . Temos que  $t_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e, substituindo  $t_n$  em



(1.17), obtemos

$$\frac{2c_r}{1-\lambda} \leq \frac{1+t_n^2}{2n} + c_r + o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(t_n z_n) dx$$

ou seja,

$$\frac{2c_r}{1-\lambda} \leq c_r + o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} H(t_n z_n) dx + \lambda t_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_n v_n dx$$

ou ainda,

$$\frac{2c_r}{1-\lambda} \leq c_r + o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} H(t_n z_n) dx + \frac{\lambda}{2} t_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} z_n^2 dx. \quad (1.18)$$

Considerando a estimativa (1.4) com  $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{4}$ , obtemos

$$|H(z)| \leq z^2 \left( \frac{1-\lambda}{8} \right) + M(\varepsilon) z^p, 2 < p < 2^*.$$

Substituindo esta estimativa em (1.18), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2c_r}{1-\lambda} &\leq o_n(1) + c_r + \int_{\mathbb{R}^N} t_n^2 z_n^2 \left( \frac{1-\lambda}{8} \right) + M t_n^p z_n^p dx + \frac{\lambda}{2} t_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} z_n^2 dx \\ &\leq o_n(1) + c_r + t_n^2 \left( \frac{1-\lambda}{8} + \frac{\lambda}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} z_n^2 dx + M t_n^p \int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^p dx \\ &\leq o_n(1) + c_r + \frac{4c_r}{1-\lambda} \left( \frac{1+3\lambda}{8} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{z_n^2}{\|z_n\|^2} dx + M \left( \frac{2\sqrt{c_r}}{\sqrt{1-\lambda}} \right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|z_n|^p}{\|z_n\|^p} dx \\ &\leq o_n(1) + c_r + \frac{c_r(1+3\lambda)}{2(1-\lambda)} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{z}_n^2 dx + M \left( \frac{2\sqrt{c_r}}{\sqrt{1-\lambda}} \right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{z}_n|^p dx. \end{aligned}$$

Mas, se o caso 2 ocorre, pelo Lema de Lions (vide Lema 1.21 em [51]), teríamos  $\hat{z}_n \rightarrow 0$  em  $L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $2 < p < 2^*$  e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{z}_n|^p dx \rightarrow 0.$$

Além disso, como

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{z}_n^2 dx \leq \|\hat{z}_n\|^2 \leq 1,$$

teríamos que

$$\frac{2c_r}{1-\lambda} \leq o_n(1) + c_r + \frac{c_r(1+3\lambda)}{2(1-\lambda)} \leq o_n(1) + \frac{3c_r + c_r\lambda}{2(1-\lambda)}.$$

Logo,

$$\frac{2c_r}{1-\lambda} - \frac{3c_r + c_r\lambda}{2(1-\lambda)} \leq o_n(1),$$

ou equivalentemente

$$\frac{c_r}{2} \leq o_n(1),$$

o que é um absurdo, pois  $c_r > 0$ . Portanto, o caso 2 não pode ocorrer.

Suponhamos agora que o caso 1 ocorra. Podemos supor então que existe uma subsequência  $n_j \rightarrow \infty$  tal que

$$\int_{B_1(y)} |\hat{u}_{n_j}|^2 dx > \frac{\delta}{2} \text{ ou } \int_{B_1(y)} |\hat{v}_{n_j}|^2 dx > \frac{\delta}{2}.$$

De fato, caso contrário, existiria  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq n_0$ , então

$$\int_{B_1(y)} |\hat{u}_{n_j}|^2 dx < \frac{\delta}{2} \text{ e } \int_{B_1(y)} |\hat{u}_{n_j}|^2 dx < \frac{\delta}{2}, \forall n \geq n_0.$$

Portanto, teríamos

$$\int_{B_1(y)} |\hat{z}_{n_j}|^2 dx < \delta,$$

uma contradição com a hipótese. Neste caso então, tomamos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx = \delta > 0.$$

Assim, se  $(y_n)$  é uma sequência tal que  $|y_n| \rightarrow \infty$  e

$$\int_{B_1(y_n)} |\hat{u}_n|^2 dx > \delta/2,$$

considerando que  $\hat{u}_n(x + y_n) \rightharpoonup \hat{u}(x)$ , temos

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx > \delta/2,$$

e portanto,

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u}(x)|^2 dx > \delta/2,$$

ou seja,  $\hat{u} \not\equiv 0$ . Logo, existe  $\Omega \subset B_1(0)$ , com  $|\Omega| > 0$  tal que

$$0 < |\hat{u}(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}_n(x + y_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n(x + y_n)|}{\|z_n\|}, \forall x \in \Omega.$$

Como temos que  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ , então necessariamente

$$u_n(x + y_n) \rightarrow \infty, \forall x \in \Omega \subset B_1(0).$$

Assim, pela condição de não-quadraticidade (NQ) e pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \nabla F(z_n(x + y_n))(z_n(x + y_n)) - F(z_n(x + y_n)) dx \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla F(z_n(x + y_n))(z_n(x + y_n)) - F(z_n(x + y_n)) dx \\ & \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \nabla F(z_n(x + y_n))(z_n(x + y_n)) - F(z_n(x + y_n)) dx \\ & = +\infty \end{aligned} \tag{1.19}$$

Por outro lado, sabemos que  $|I'(z_n)z_n| \leq \|I'(z_n)\| \|z_n\| \rightarrow 0$ , se  $n \rightarrow \infty$  e portanto,  $I'(z_n)z_n = o_n(1)$ . Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \nabla F(z_n)(z_n) - F(z_n) dx = I(z_n) - \frac{1}{2} I'(z_n)z_n \leq c_r + 1,$$

o que é uma contradição com (1.19).

Se  $|y_n| \leq R$ ,  $R > 1$ , obtemos

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_1(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx \leq \int_{B_{2R}(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx,$$

e como  $\hat{u}_n(x + y_n) \rightarrow \hat{u}$  em  $B_{2R}(0)$ , segue que

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_1(0)} |\hat{u}(x)|^2 dx.$$

Analogamente à situação anterior, existe  $\Omega \subset B_1(0)$ ,  $|\Omega| > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n(x + y_n)|}{\|z_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}_n(x + y_n)| = |\hat{u}(x)| \neq 0, \forall x \in \Omega.$$

Logo, o argumento segue análogo ao caso em que  $|y_n| \rightarrow \infty$ . Assim sendo, o caso 1 também não pode ocorrer e está garantida a existência de subsequências limitadas.  $\square$

Com pequenas alterações ao que foi feito em [36], podemos mostrar que o funcional  $I$  satisfaz o

**Teorema 1.10.** (*Princípio de Criticalidade Simétrica*) *Seja  $I$  o funcional associado ao*

problema  $(P)$ . Se  $(u, v)$  é ponto crítico de  $I$  em  $E_{rad}$ , então  $(u, v)$  será ponto crítico de  $I$  em  $E$ .

Agora estamos prontos para mostrar nosso primeiro resultado:

**Teorema 1.11.** *Suponha que  $0 < s < 1$  e  $0 < \lambda < 1$ . Então o sistema  $(P)$  possui uma solução  $(u, v)$  em  $E_{rad}$ .*

*Demonstração.* Conforme mostrado anteriormente, o funcional  $I$  definido em  $E_{rad}$  satisfaz as condições  $(\mathcal{I}_1)$  e  $(\mathcal{I}_2)$  do Teorema 1.4. Então, pelo Princípio Variacional de Ekeland [22], temos garantida a existência de uma sequência de Cerami no nível  $c_r$ . Como  $(NQ)$  é satisfeita, nos Lemas 1.6 e 1.9 mostramos que o funcional  $I$  satisfaz a condição de Cerami  $(Ce)_{c_r}$  em  $E_{rad}$ . Então, pelo Teorema 1.4 temos que  $c_r$  é um valor crítico de  $I$  e portanto o limite forte  $z$  da sequência de Cerami  $(z_n)$ , é um ponto crítico de  $I$  em  $E_{rad}$ . Mas os pontos críticos de  $I$  são exatamente as soluções de  $(P)$ . Portanto, temos que  $z = (u, v)$  é uma solução não-nula de  $(P)$ , pois  $c_r > 0$  e temos que a solução é radial, pois estamos trabalhando em  $E_{rad}$ . Pelo Princípio da Criticalidade Simétrica, temos que nossa solução  $(u, v)$  encontrada em  $E_{rad}$  é também uma solução de  $(P)$  em  $E$ .  $\square$

Ainda não temos informação sobre o sinal de tal solução mas, como a solução é radial, temos que  $u$  e  $v$  satisfazem a seguinte desigualdade, cuja demonstração pode ser encontrada em [47].

**Teorema 1.12.** *(Desigualdade de Strauss) Seja  $N \geq 2, N \in \mathbb{N}$ . Para cada  $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$  existe  $C_N$  dependendo apenas da dimensão  $N$ , tal que*

$$|u(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(1-N)}{2}} \|u\|_{H^1},$$

para quase todo  $x \in \mathbb{R}^N$ .

Portanto, temos que  $u(x)$  e  $v(x)$  convergem à zero quando  $|x|$  converge ao infinito.

## 1.3 Solução minimizante restrita à vínculo

Consideremos agora o funcional  $I$ , escrito da seguinte forma:

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx,$$

onde

$$G(u, v) = -\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) + \lambda uv. \quad (1.20)$$

Nossa ideia agora é mostrar que  $I(u, v)$  possui um mínimo no conjunto de todas as soluções não triviais de  $(P)$ . Para isto, faremos uso do seguinte teorema, devido a Brezis e Lieb, que pode ser encontrado em [13], Teorema 2.1.

**Teorema 1.13.** *Seja  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com  $G(0, 0) = 0$ . Suponha que:*

- i)  $\limsup_{|(u,v)| \rightarrow \infty} |(u, v)|^{-2^*} G(u, v) \leq 0;$
- ii)  $\limsup_{|(u,v)| \rightarrow 0} |(u, v)|^{-2^*} G(u, v) \leq 0;$
- iii) *existe  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $G(u_0, v_0) > 0;$*
- iv) *para todo  $\gamma > 0$  existe  $C_\gamma$  tal que para todos pares  $(u, v), (w, z) \in \mathbb{R}^2$ , temos*

$$|G((u, v) + (w, z)) - G(u, v)| \leq \gamma[|G(u, v)| + |(u, v)|^{2^*}] + C_\gamma[|G(w, z)| + |(w, z)|^{2^*} + 1];$$

e seja

$$m := \inf_{(u,v) \in E} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx \geq 1 \right\}.$$

Então existe  $(u, v) \in E$  tal que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx = m \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx = 1.$$

**Observação 1.4.** *Conforme observado em [13], a condição (iv) parece um pouco abstrata, mas é válida, por exemplo, no seguinte caso:*

$$(iv') \quad \lim_{|(u,v)| \rightarrow \infty} |(u, v)|^{-2^*} |G(u, v)| = 0.$$

*Iremos trabalhar com esta condição (iv'), ao invés da condição (iv).*

Utilizaremos argumentos semelhantes aos utilizados em [36] para verificar que a função  $G$ , como definida em (1.20) satisfaz as condições deste teorema. Primeiramente, observamos que (iv') implica (i). Temos que

$$\begin{aligned} |(u, v)|^{-2^*} G(u, v) &= (u^2 + v^2)^{\frac{-N}{N-2}} \left[ -\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) + \lambda uv \right] \\ &\leq (u^2 + v^2)^{\frac{-N}{N-2}} \left[ (u^2 + v^2) \{-1/2 + 1/2s + \lambda/2\} \right] \\ &\quad - (u^2 + v^2)^{\frac{-N}{N-2}} \left[ \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) \right] \\ &\leq C(u^2 + v^2)^{\frac{-2}{N-2}} - (u^2 + v^2)^{\frac{-N}{N-2}} \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)). \end{aligned}$$

Tomando o valor absoluto e utilizando o fato de que  $\ln(1 + s(u^2 + v^2)) \leq s(u^2 + v^2)$ , temos que:

$$\begin{aligned} |(u, v)|^{-2^*} |G(u, v)| &\leq C(u^2 + v^2)^{\frac{-2}{N-2}} + \frac{(u^2 + v^2)^{\frac{-N}{N-2}}}{2s^2} s(u^2 + v^2) \\ &= C(u^2 + v^2)^{\frac{-2}{N-2}} + \frac{1}{2s} (u^2 + v^2)^{\frac{-2}{N-2}} \\ &\leq \tilde{C}(u^2 + v^2)^{\frac{-2}{N-2}}. \end{aligned}$$

Como  $N \geq 3$ , temos que a condição  $(iv')$  é verificada, assim como a condição  $(i)$ .

Vamos agora verificar  $(ii)$ . Seja  $\xi > 0$  tal que  $\xi = u^2 + v^2$ . Para  $\xi > 0$  suficientemente pequeno temos, pela expansão de Taylor que se  $\xi \rightarrow 0$ ,

$$\ln(1 + s\xi) = s\xi - \frac{\xi^2 s^2}{2} + \frac{\xi^3 s^3}{3} + o(\xi^3).$$

Assim, para  $\xi > 0$  suficientemente pequeno e usando o fato de que  $|\lambda uv| \leq \frac{\lambda}{2}(u^2 + v^2)$ , temos:

$$\begin{aligned} G(\xi) &= -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s\xi) + \lambda uv \\ &= -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2s} + \lambda uv \\ &\quad - \frac{1}{2s^2} \left( \xi s - \frac{\xi^2 s^2}{2} + \frac{\xi^3 s^3}{3} + o(\xi^3) \right) \\ &= -\frac{\xi}{2} + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{\xi^3 s}{6} + \frac{o(\xi^3)}{2s^2} + \lambda uv \\ &\leq \left( \frac{-1}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \xi + \frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^3 s}{6} + \frac{o(\xi^3)}{2s^2}. \end{aligned}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher  $\delta > 0$  tal que se  $\xi < \delta$  então

$$\left( \frac{-1}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \xi + \frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^3 s}{6} + \frac{o(\xi^3)}{2s^2} \leq 0,$$

pois  $0 < \lambda < 1$ . Portanto,  $\limsup_{|(u,v)| \rightarrow 0} |(u, v)|^{-2^*} G(u, v) \leq 0$ .

Resta verificar  $(iii)$ . Dado  $\alpha > 0$ , seja  $\xi = \xi(\alpha)$  tal que  $\ln(1 + s\xi) < \frac{\alpha s \xi}{2}$ . Se  $u > 0$ ,

$v > 0$  e  $\xi = u^2 + v^2$ , temos

$$\begin{aligned} G(\xi) &> -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s\xi) \\ &> -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2s} - \frac{1}{2s^2} \frac{\xi\alpha s}{2} \\ &= \xi \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2s} - \frac{\alpha}{4s} \right) \\ &= \frac{\xi}{2} \left( -1 + \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{2s} \right). \end{aligned}$$

Podemos escolher  $\alpha > 0$  de tal modo que  $-1 + 1/s - \alpha/2s > 0$  e desse modo, se  $u_0^2 + v_0^2 = \xi(\alpha)$  então  $G(u_0, v_0) > 0$ .

Assim, mostramos que todas as condições do Teorema 1.13 são válidas, e então existe um par  $(\hat{u}, \hat{v}) \in E$  tal que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \hat{u}|^2 + |\nabla \hat{v}|^2 dx = m$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\hat{u}, \hat{v}) dx = 1.$$

**Observação 1.5.** *Pelo Teorema 2.2 de [13], temos ainda que se  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$  são como obtidas no Teorema 1.13, então, por um rescalonamento, com  $\theta > 0$ , as funções  $\bar{u}(x) := \hat{u}(\frac{x}{\theta})$  e  $\bar{v}(x) := \hat{v}(\frac{x}{\theta})$  são soluções do problema (P), com*

$$0 < I(\bar{u}, \bar{v}) \leq I(u, v), \forall (u, v) \in E.$$

Portanto, obtemos uma solução de (P) cuja energia é mínima, isto é,

$$I(\bar{u}, \bar{v}) = m := \inf \{I(u, v); (u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\} \text{ e } (u, v) \text{ resolve (P)}\}.$$

Entretanto, ainda não sabemos se esta solução é radial ou não, nem temos informação sobre seu sinal.

Pelo Teorema 2.3 de [13] temos que as soluções obtidas pertencem à  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , com  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0$ . Além disso, pelo Lema 2.4 de [13], temos que toda solução de (P) em  $E$  satisfaz a identidade de Pohozaev:

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx. \quad (1.21)$$

## 1.4 Equivalência entre as soluções encontradas

Nosso próximo passo será mostrar que esta solução  $(\bar{u}, \bar{v})$  obtida pelo rescalonamento da solução do problema de minimização com vínculo coincide com a solução pertencente à  $E_{rad}$  obtida pelo Teorema do Passo da Montanha, no Teorema 1.11. Inicialmente, mostraremos que a solução  $(\bar{u}, \bar{v})$  encontrada coincide com uma solução que tenha sido obtida pelo Teorema do Passo da Montanha aplicado em  $E$  e não em  $E_{rad}$ . Depois mostraremos que, de fato, as soluções encontradas pelo Teorema do Passo da Montanha em todo o espaço  $E$  e em  $E_{rad}$  coincidem. Utilizaremos aqui argumentos semelhantes aos encontrados no artigo [27] de Jeanjean e Tanaka. Para isto, faremos uso das seguintes notações:

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

onde  $\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], E); \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}$ ;

$$c_r := \inf_{\gamma \in \Gamma_r} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

onde  $\Gamma_r := \{\gamma \in C([0, 1], E_{rad}); \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}$ , e

$$m := \inf \{I(u, v) : (u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\} \text{ e } (u, v) \text{ resolve } (P)\}.$$

Observamos que o nível  $c$  existe, pela geometria do funcional, mas não é possível verificar a condição  $(Ce)_c$  em  $E$ , somente em  $E_{rad}$ .

**Lema 1.14.** *Dado  $\bar{z} \in E$  com  $I(\bar{z}) = m$ , existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\bar{z} \in \gamma([0, 1])$  e  $\max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)) = I(\bar{z}) = m$ .*

*Demonstração.* Pela Observação 1.5, temos que tal  $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$  existe. Logo, consideremos o caminho  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  definido por

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = 0 \\ \bar{u}(x/t), & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

e analogamente para  $\alpha_2(t)$  com  $\bar{v}(x/t)$ . Temos que

$$\|\alpha(t)\|^2 = t^{N-2} (\|\nabla \bar{u}\|_2^2 + \|\nabla \bar{v}\|_2^2) + t^N (\|\bar{u}\|_2^2 + \|\bar{v}\|_2^2),$$

logo  $\alpha(t) : [0, \infty) \rightarrow E$ . Ainda, como  $(\bar{u}, \bar{v})$  é solução de  $(P)$ , segue da identidade de



Pohozaev (1.21) que  $\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}, \bar{v}) dx > 0$ . Além disso:

$$I(\alpha(t)) = \frac{t^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 + |\nabla \bar{v}|^2 dx - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}, \bar{v}) dx.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) &= (N-2) \frac{t^{N-3}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 + |\nabla \bar{v}|^2 dx - N t^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}, \bar{v}) dx \\ &= A t^{N-3} + B t^{N-1} \\ &= t^{N-3} (A - B t^2) \end{aligned}$$

onde  $A := \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 + |\nabla \bar{v}|^2 dx$  e  $B := N \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}, \bar{v}) dx$ .

Mais uma vez, pela identidade de Pohozaev, temos que  $A = B$  e assim  $t^{N-3}(B - B t^2) = t^{N-3}B(1 - t^2)$ , com  $t > 0$ , portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) &> 0, \text{ se } 0 < t < 1 \\ &= 0, \text{ se } t = 1 \\ &< 0, \text{ se } t > 1. \end{aligned}$$

Logo, para  $L > 0$  suficientemente grande, temos

$$\max_{0 \leq t \leq L} I(\alpha(t)) = m, \text{ e } I(\alpha(L)) < 0.$$

Portanto, o resultado segue se  $\gamma(t) := \alpha(t/L)$ . □

O que mostramos garante que  $c \leq m$ . Consideremos agora os conjuntos

$$\mathcal{S} = \left\{ (u, v) \in E; \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx = 1 \right\},$$

$$\mathcal{P} := \{(u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\}; J(u, v) = 0\},$$

onde

$$J(u, v) := \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx. \quad (1.22)$$

Pelo que vimos até agora, temos  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ , pois a solução  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{P}$  e  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ , pela condição (iii) do Teorema 1.13.

**Lema 1.15.**  $m = \inf_{(u,v) \in \mathcal{P}} I(u, v)$ .

*Demonstração.* Para cada  $(u, v) \in \mathcal{S}$  fixado, definamos a aplicação:

$$\Phi_\alpha : \mathcal{S} \rightarrow E, (u(x), v(x)) \mapsto \Phi_\alpha(u, v) = \left(u\left(\frac{x}{\alpha}\right), v\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right)$$

onde

$$\alpha := \sqrt{\frac{N-2}{2N}} \|(\nabla u(\cdot), \nabla v(\cdot))\|_2.$$

Primeiramente, observamos que, na realidade,  $\Phi_\alpha$  é uma função de  $\mathcal{S}$  em  $\mathcal{P}$ . De fato, dado  $(u(x), v(x)) \in \mathcal{S}$ , temos que  $\int_{\mathbb{R}^N} G(u(x), v(x)) dx = 1$ . Mas então:

$$\begin{aligned} & \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x/\alpha)|^2 + |\nabla v(x/\alpha)|^2 dx = \\ &= \frac{N-2}{2} \alpha^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 + |\nabla v(x)|^2 dx \\ &= \frac{N-2}{2} \alpha^{N-2} \|(\nabla u(\cdot), \nabla v(\cdot))\|_2^2 \\ &= \frac{N-2}{2} \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} \|(\nabla u(\cdot), \nabla v(\cdot))\|_2^{N-2} \|(\nabla u(\cdot), \nabla v(\cdot))\|_2^2 \\ &= N \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}+1} \|(\nabla u(\cdot), \nabla v(\cdot))\|_2^N \\ &= N \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N}{2}} \|(\nabla u(\cdot), \nabla v(\cdot))\|_2^N \\ &= N \alpha^N = N \alpha^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x), v(x)) dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x/\alpha), v(x/\alpha)) dx. \end{aligned}$$

Portanto,  $(u(x/\alpha), v(x/\alpha)) \in \mathcal{P}$ . Agora, mostraremos que  $\Phi_\alpha$  é sobrejetiva. Tomemos  $(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) \in \mathcal{P}$ , portanto  $\int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) dx > 0$ . Queremos mostrar que existe uma mudança de variáveis  $x = \beta y$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}(\beta y), \tilde{v}(\beta y)) dy = 1,$$

o que implicaria que  $(\tilde{u}(\beta y), \tilde{v}(\beta y)) \in \mathcal{S}$ . Então, teríamos

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}(\beta y), \tilde{v}(\beta y)) dy = \frac{1}{\beta^N} \int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) dx,$$

e como  $(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) \in \mathcal{P}$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) dx = \frac{N-2}{2N} \|(\nabla \tilde{u}(\cdot), \nabla \tilde{v}(\cdot))\|_2^2.$$

Portanto, tal mudança é possível se, e somente se,

$$\beta^N = \frac{N-2}{2N} \|(\nabla \tilde{u}(\cdot), \nabla \tilde{v}(\cdot))\|_2^2.$$

Tomemos então  $(\tilde{u}(\beta x), \tilde{v}(\beta x)) \in \mathcal{S}$ . Neste caso, temos que  $\alpha$  é dado por

$$\alpha = \sqrt{\frac{N-2}{2N}} \|(\nabla \tilde{u}(\beta \cdot), \nabla \tilde{v}(\beta \cdot))\|_2 = \sqrt{\frac{N-2}{2N}} \beta^{\frac{2-N}{2}} \|(\nabla \tilde{u}(\cdot), \nabla \tilde{v}(\cdot))\|_2.$$

Mas então

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\sqrt{\frac{N-2}{2N}} \beta^{\frac{2-N}{2}} \|(\nabla \tilde{u}(\cdot), \nabla \tilde{v}(\cdot))\|_2} = \frac{\beta^{N/2}}{\sqrt{\frac{N-2}{2N}} \|(\nabla \tilde{u}(\cdot), \nabla \tilde{v}(\cdot))\|_2} = \frac{\beta^{N/2}}{\beta^{N/2}} = 1,$$

ou seja,  $\Phi_\alpha(\tilde{u}(\beta x), \tilde{v}(\beta x)) = (\tilde{u}(x), \tilde{v}(x))$ . Assim mostramos que  $\Phi_\alpha$  é sobrejetiva.

Além disso, dado  $(u, v) \in \mathcal{S}$ , temos  $I(\Phi_\alpha(u, v)) \in \mathcal{P}$  e

$$\begin{aligned} I(\Phi_\alpha(u, v)) &= \frac{1}{2} \alpha^{N-2} \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^2 - \alpha^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{N-2}{2N} \right)^{\frac{N-2}{2}} \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^N - \left( \frac{N-2}{2N} \right)^{N/2} \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^N \\ &= \frac{1}{N} \left( \frac{N-2}{2N} \right)^{\frac{N-2}{2}} \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^N. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\inf_{(u,v) \in \mathcal{P}} I(u, v) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{S}} I(\Phi_\alpha(u, v)) = \inf_{(u,v) \in \mathcal{S}} \frac{1}{N} \left( \frac{N-2}{2N} \right)^{\frac{N-2}{2}} \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^N.$$

Mas, pelo Teorema 1.13 temos que existe  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{S}$  tal que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 + |\nabla \bar{v}|^2 dx = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^2; \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx \geq 1 \right\}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}, \bar{v}) dx = 1.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \|(\nabla \bar{u}, \nabla \bar{v})\|_2^2 = \inf_{(u,v) \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1}{2} \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^2 \right\},$$

e, ainda pela Observação 1.5, temos que  $\Phi_\alpha(\bar{u}, \bar{v})$  tem energia mínima e assim

$$\inf_{(u,v) \in \mathcal{P}} I(u, v) = I(\Phi_\alpha(\bar{u}, \bar{v})) = m.$$

□

Vamos agora mostrar que o funcional  $J(u, v)$ , definido em (1.22), é não-negativo numa vizinhança de  $(0, 0)$ . Lembrando então que, dado  $\varepsilon > 0$ , temos de (1.4) que dado  $2 < p < 2^*$ , existe  $M > 0$  tal que

$$|H(u, v)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) (u^2 + v^2) + M(u^2 + v^2)^{p/2},$$

segue que

$$\begin{aligned} J(u, v) &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx \\ &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 + v^2 dx \\ &\quad - N \int_{\mathbb{R}^N} H(u, v) dx - N\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx \\ &\geq \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 + v^2 dx + N \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 + v^2 dx \\ &\quad - NM \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx - \frac{N\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 + v^2 dx \\ &\geq \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx + \frac{N}{2} (1 - \varepsilon - \lambda) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 + v^2 dx \\ &\quad - NM \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx \\ &\geq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + v^2 dx - NM \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx \end{aligned}$$

onde  $C_1 = \min \left\{ \frac{N-2}{2}, \frac{N}{2}(1 - \varepsilon - \lambda) \right\}$ . Escolhendo  $\varepsilon > 0$  tal que  $1 - \varepsilon - \lambda > 0$  e utilizando novamente a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + v^2)^{p/2} dx \leq C \|(u, v)\|^p$$

obtemos

$$J(u, v) \geq C_1 \|(u, v)\|^2 - NMC \|(u, v)\|^p.$$

Tomemos então  $0 < \rho < 1$  tal que  $\rho^p < \frac{1}{2NMC} C_1 \rho^2$ . Então, se  $\|(u, v)\| = \rho$ , temos

$$J(u, v) \geq C_1 \rho^2 - \frac{1}{2} C_1 \rho^2 = \frac{1}{2} C_1 \rho^2.$$

Segue então que  $J(u, v) > 0$ .

**Lema 1.16.**  $m = c$ .

*Demonstração.* Pelo Lema 1.14, temos que  $c \leq m$ . Vamos mostrar que  $c \geq m$ . Seja  $\gamma \in \Gamma$ , temos que  $\gamma([0, 1]) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ . De fato, conforme verificado acima, temos que existe  $\rho > 0$  tal que  $J(u, v) > 0$  para  $0 < \|(u, v)\| < \rho$ , e assim

$$J(u, v) = \frac{N-2}{2} \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^2 - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u, v) dx = NI(u, v) - \|(\nabla u, \nabla v)\|_2^2 > 0.$$

Dado  $\gamma \in \Gamma$ , com  $\gamma(0) = 0$  e  $I(\gamma(1)) < 0$ , segue que

$$J(\gamma(0)) = 0 \quad \text{e} \quad J(\gamma(1)) < NI(\gamma(1)) < 0.$$

Então existe  $t_0 > 0$  tal que  $\|\gamma(t_0)\| > \rho$  e  $J(\gamma(t_0)) = 0$ , e assim  $\gamma(t_0) \in \mathcal{P}$ .

No entanto, pelo Lema 1.15,  $m = \inf_{(u,v) \in \mathcal{P}} I(u, v)$ , e assim, para cada  $\gamma \in \Gamma$ , temos

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_0)) \geq \inf_{(u,v) \in \mathcal{P}} I(u, v) = m,$$

o que implica que  $c \geq m$  e portanto,  $c = m$ . □

**Observação 1.6.** *Assim, a solução que minimiza energia é a solução obtida pelo Teorema do Passo da Montanha, caso a mesma exista.*

Vamos agora mostrar que tal solução é positiva. Para isto, usaremos o seguinte resultado, semelhante ao Lema 2.12 de [39]:

**Lema 1.17.** *Para cada  $z \in E \setminus \{(0, 0)\}$  com  $\int_{\mathbb{R}^N} G(z) > 0$ , existe um único número real  $t > 0$  tal que  $z(\frac{\cdot}{t}) \in \mathcal{P}$  e  $I(z(\frac{\cdot}{t}))$  é o máximo para a função*

$$t \mapsto I\left(z\left(\frac{\cdot}{t}\right)\right), t > 0.$$

*Demonstração.* Consideramos  $\gamma(t)$  dada por  $\gamma(t) := z\left(\frac{\cdot}{t}\right)$ , então

$$I(\gamma(t)) = I\left(z\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \frac{t^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(z) dx.$$

Temos então que

$$\gamma'(t) = (N-2) \frac{t^{N-3}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - N t^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} G(z) dx,$$

e  $\gamma'(t) = 0$  se, e somente se,

$$t^{N-3} \left( \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - N t^2 \int_{\mathbb{R}^N} G(z) dx \right) = 0,$$

portanto,  $t = 0$  ou  $t^2 = \frac{(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx}{2N \int_{\mathbb{R}^N} G(z) dx}$ , com  $\int_{\mathbb{R}^N} G(z) dx > 0$ . □

Estamos agora prontos para mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 1.18.** *O sistema (P) possui uma solução positiva radial, de energia mínima, via o Teorema do Passo da Montanha.*

*Demonstração.* Seja

$$G(u, v) = - \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) + \lambda uv,$$

vimos que existe o par  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{P}$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}, \bar{v}) dx > 0$$

e

$$I(\bar{u}, \bar{v}) = c = m = \inf_{(u,v) \in \mathcal{P}} I(u, v).$$

Então,

$$G(|\bar{u}|, |\bar{v}|) = - \left( \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2} \right) + \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)) + \lambda |\bar{u}| |\bar{v}|.$$

Mas  $\bar{u}\bar{v} \leq |\bar{u}| |\bar{v}|$ , o que implica que

$$G(|\bar{u}|, |\bar{v}|) \geq G(\bar{u}, \bar{v}) > 0.$$

Assim, pelo Lema 1.17, podemos projetar  $(|\bar{u}|, |\bar{v}|)$  em  $\mathcal{P}$ , isto é, existe  $t_0 > 0$  tal que

$$\left( |\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0})|, |\bar{v}(\frac{\cdot}{t_0})| \right) \in \mathcal{P}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
I\left(|\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0})|, |\bar{v}(\frac{\cdot}{t_0})|\right) &= \frac{t_0^{N-2}}{2} \|(\nabla|\bar{u}|, \nabla|\bar{v}|)\|_2^2 - t_0^N \int_{\mathbb{R}^N} G(|\bar{u}|, |\bar{v}|) dx \\
&\leq \frac{t_0^{N-2}}{2} \|(\nabla\bar{u}, \nabla\bar{v})\|_2^2 - t_0^N \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}, \bar{v}) dx \\
&= \frac{1}{2} \|(\nabla\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0}), \nabla\bar{v}(\frac{\cdot}{t_0}))\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0}), \bar{v}(\frac{\cdot}{t_0})) dx \\
&= I\left(\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0}), \bar{v}(\frac{\cdot}{t_0})\right) \\
&\leq I(\bar{u}, \bar{v})
\end{aligned}$$

pois  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{P}$  e  $I(\bar{u}, \bar{v}) = \max_{t>0} I\left(\bar{u}(\frac{\cdot}{t}), \bar{v}(\frac{\cdot}{t})\right)$ .

Ainda, como o ínfimo sobre  $\mathcal{P}$  é atingido, temos

$$I(\bar{u}, \bar{v}) = \min_{z \in \mathcal{P}} I(z) \leq I\left(|\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0})|, |\bar{v}(\frac{\cdot}{t_0})|\right) \leq I(\bar{u}, \bar{v}).$$

Assim,  $I\left(|(\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0})|, |\bar{v}(\frac{\cdot}{t_0})|\right) = m$ , isto é,  $\left(|\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0})|, |\bar{v}(\frac{\cdot}{t_0})|\right)$  é um ponto de mínimo de  $I$  sobre  $\mathcal{P}$ . Como a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$  é uma restrição natural do problema, (vide [41]), temos que  $\left(|\bar{u}(\frac{\cdot}{t_0})|, |\bar{v}(\frac{\cdot}{t_0})|\right)$  é também um ponto de mínimo sobre  $E$ , e assim uma solução não negativa de  $(P)$ . Pelo Princípio do Máximo Forte, tal solução é estritamente positiva, e consequentemente pelo Teorema 1.1, radial.

Na Observação 1.6, ainda não sabíamos se existia uma solução via Teorema do Passo da Montanha mas, como a solução positiva que minimiza energia é radial, com  $m = c$ , e no Teorema 1.11 obtemos uma solução radial do problema em  $E$ , via Teorema do Passo da Montanha, segue que  $c = c_r$  e as soluções são coincidentes.

□

## Solução para um sistema radial

Neste capítulo vamos modificar o sistema com o qual trabalhamos no Capítulo 1, transformando-o num sistema não-autônomo, mas ainda tendo o sistema  $(P)$  como seu problema limite. Consideramos então o seguinte sistema em  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 3$ :

$$(P_r) \begin{cases} -\Delta u + u &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(|x|))(u^2 + v^2)} u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(|x|))(u^2 + v^2)} v + \lambda u \end{cases}$$

onde  $a$  é uma função satisfazendo as seguintes condições:

(R1)  $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a(x) = a(|x|)$ , isto é,  $a$  é uma função radial;

(R2)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 0$ ;

(R3) existem constantes  $a_0, a_1 > 0$  tais que  $-a_0 < a(x) < a_1, \forall x \in \mathbb{R}^N$ , mas ainda com

$$0 < s - a_0 < s + a(x) < s + a_1 < 1.$$

A este sistema está associado o funcional

$$I_r(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H_r(x, u, v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda uv dx,$$

em que

$$H_r(x, u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2(s + a(x))} - \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)),$$



e definimos

$$F_r(x, u, v) = H_r(x, u, v) + \lambda uv.$$

**Observação 2.1.** *Da condição (R3), temos que não existe uma relação direta entre os funcionais  $I$  e  $I_r$ , isto é, dado qualquer par  $(u, v) \in E$ , podemos ter que  $I(u, v) \leq I_r(u, v)$  como  $I_r(u, v) \leq I(u, v)$ , ou até mesmo uma oscilação entre os dois casos, quando mudamos o par  $(u, v)$ . Veremos nos próximos capítulos que, quando  $a(x)$  deixa de ser radial, precisamos impor condições sobre a mesma de maneira a termos uma relação fixa entre os funcionais no infinito e  $I$ , associado ao problema não-autônomo, para podermos obter solução para o sistema. Observamos ainda que faremos uma abordagem diferenciada daquela feita por Stuart e Zhou, para o caso escalar, apresentada em [49].*

Trabalharemos novamente em  $E_{rad}$  com a norma usual de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Faremos isso pois, pela estrutura de nosso sistema, com  $a(x)$  radial temos que se  $(u, v)$  é solução em  $E_{rad}$  então, pelo Princípio da Criticalidade Simétrica, temos que  $(u, v)$  é solução em  $E$ .

## 2.1 Resultados preliminares

Começaremos com o seguinte resultado, que mostra o comportamento do funcional  $I_r$  a medida que a função  $a(x)$  varia.

**Proposição 2.1.** *Considere a função*

$$L(t) := \frac{z}{2t} - \frac{1}{2t^2} \ln(1 + tz),$$

onde  $z$  é uma constante positiva e  $t \in (0, \infty)$ . Então  $L$  é uma função decrescente.

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} L'(t) &= -\frac{z}{2t^2} - \frac{z}{2t^2(1+tz)} + \frac{2\ln(1+tz)}{2t^3} \\ &= \frac{-tz(1+tz) - tz + 2(1+tz)\ln(1+tz)}{2t^3(1+tz)} \\ &= \frac{-(1+tz)^2 + 1 + 2(1+tz)\ln(1+tz)}{2t^3(1+tz)}. \end{aligned}$$

Como  $2t^3(1+tz) > 0$ , consideremos  $h(y) := -y^2 + 1 + 2y \ln y$ , com  $1+tz = y, y > 1$ . Temos que  $h(1) = 0$  e mostraremos que  $h(y) \leq h(1) = 0, \forall y > 1$ . De fato, temos que

$$h'(y) = -2y + 2 \ln y + 2 = 2(1 + \ln y - y),$$

e fazendo  $g(y) = 1 + \ln y - y$ , temos  $g'(y) = \frac{1}{y} - 1$ , e portanto,  $g'(y) < 0$  se  $y > 1$ . Assim,  $g(y) \leq g(1) = 0$ , o que implica que  $h'(y) < 0$  se  $y > 1$ . Segue que  $L'(t) < 0$  se  $1 + tz = y > 1$ , o que sempre é válido pois  $t > 0$ . Portanto,  $L(t)$  é decrescente.  $\square$

**Lema 2.2.** *O funcional  $I_r$  satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha 1.4.*

*Demonstração.* Claramente temos que  $I_r(0, 0) = 0$ . Verificaremos inicialmente a condição  $(\mathcal{I}_1)$ . Fazendo a mudança de variáveis  $u^2 + v^2 = z^2$ , obtemos que

$$\frac{H_r(x, z)}{z^2} = \frac{1}{2(s + a(x))} - \frac{1}{2(s + a(x))^2} \frac{\ln(1 + (s + a(x))z^2)}{z^2}.$$

Calculando o limite quando  $z \rightarrow 0^+$ , obtemos

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{H_r(x, z)}{z^2} = 0.$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |z| < \delta$ , então

$$\left| \frac{H_r(x, z)}{z^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, temos que para todo  $z^2 > 0$ ,  $\ln(1 + (s + a(x))z^2) \leq (s + a(x))z^2$ , o que implica

$$\begin{aligned} |H_r(x, z)| &\leq \frac{z^2}{2(s + a(x))} + \frac{1}{2(s + a(x))^2} (s + a(x))z^2 \\ &= \frac{z^2}{s + a(x)} < \frac{z^2}{s - a_0} \end{aligned}$$

onde utilizamos a condição  $(R3)$ . Então, se  $|z| \geq \delta$ , temos  $|z|/\delta \geq 1$ , o que implica que  $\frac{z^2}{\delta^2} \leq \frac{z^p}{\delta^p}$ , com  $2 < p < 2^*$ . Assim,

$$\frac{z^2}{s + a_0} \leq z^p \left( \frac{1}{s + a_0} \right) \frac{\delta^2}{\delta^p} = M(\varepsilon)z^p.$$

Portanto, para todo  $|z| > 0$ , temos que se  $2 < p < 2^*$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M(\varepsilon) > 0$  tal que

$$|H_r(x, z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} z^2 + M(\varepsilon) z^p. \quad (2.1)$$

Com esta estimativa, a verificação de  $(\mathcal{I}_1)$  segue análoga ao caso autônomo, feita na Proposição 1.5. Para  $(\mathcal{I}_2)$ , observamos que de  $(R3)$ , temos  $s + a(x) < s + a_1$ , e da

Proposição 2.1, segue que os funcionais associados satisfazem a relação  $I_r(u, v) \leq I_1(u, v)$ , onde  $I_1$  é o funcional associado ao problema autônomo, análogo ao funcional  $I$  do Capítulo 1, apenas substituindo-se  $s$  por  $s + a_1$ . Assim, como feito para tal funcional  $I$ , novamente na Proposição 1.5 podemos encontrar  $e \in E_{rad}$  tal que  $I_1(e, 0) < 0$ . Disso segue que  $I_r(e, 0) < 0$ . Portanto, o funcional  $I_r$  satisfaz as condições da geometria do Teorema do Passo da Montanha.  $\square$

Vamos agora mostrar qual o efeito que a variação da função  $a(x)$  provoca na expressão de não-quadraticidade associada ao problema.

**Proposição 2.3.** *Considere a função  $Q(t) := \frac{1}{2} \nabla F_r(t, z)z - F_r(t, z)$ , com  $t > 0$  e  $z = (u, v)$ , com  $u > 0$  e  $v > 0$  constantes. Então  $Q(t)$  é decrescente.*

*Demonstração.* Temos que

$$Q(t) = \frac{1}{2} \frac{z^2}{1 + tz} - \frac{z}{2t} + \frac{1}{2t^2} \ln(1 + tz),$$

e

$$\begin{aligned} Q'(t) &= \frac{1}{2} \frac{-z^3}{(1 + tz)^2} + \frac{z}{2t^2} - \frac{1}{t^3} \ln(1 + tz) + \frac{1}{2t^2} \frac{z}{(1 + tz)} \\ &= \frac{-t^3 z^3 + tz(1 + tz)^2 - 2(1 + tz)^2 \ln(1 + tz) + tz(1 + tz)}{2t^3(1 + tz)^2} \\ &= \frac{-t^3 z^3 + tz + 2t^2 z^2 + t^3 z^3 - 2(1 + tz)^2 \ln(1 + tz) + tz + t^2 z^2}{2t^3(1 + tz)^2} \\ &= \frac{2tz + 3t^2 z^2 - 2(1 + tz)^2 \ln(1 + tz)}{2t^3(1 + tz)^2} \\ &= \frac{3(1 + tz)^2 - 4(1 + tz) + 1 - 2(1 + tz)^2 \ln(1 + tz)}{2t^3(1 + tz)^2} \end{aligned}$$

Queremos mostrar que  $Q'(t) < 0$  para  $t > 0$ . Como  $2t^3(1 + tz) > 0$ , fazendo então  $1 + tz = y$  temos para  $y \geq 1$  que

$$h(y) := 3y^2 - 4y + 1 - 2y^2 \ln y,$$

e

$$h(1) = 0.$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} h'(y) &= 6y - 4 - 4y \ln y - 2y \\ &= 4y - 4y \ln y - 4 \\ &= 4(y - y \ln y - 1). \end{aligned}$$

Fazendo agora  $g(y) := y - y \ln y - 1$ , temos que  $g'(y) = -\ln y \leq 0$ , para todo  $y \geq 1$ . Portanto, temos que  $g(y) \leq g(1) = 0$  e assim,

$$h'(y) \leq 0, \forall y \geq 1,$$

o que implica  $h(y) \leq h(1) = 0$ , para todo  $y \geq 1$ . Assim,  $Q'(t) \leq 0$ , para todo  $1 + tz = y \geq 1$ , ou seja, para todo  $tz > 0$ . Como  $z \geq 0$ , por estar associado com um termo quadrático, temos que  $Q'(t) < 0$ , para todo  $t > 0$ .  $\square$

**Observação 2.2.** *Pela proposição acima, temos que a função  $F_r(x, u, v)$  satisfaz a condição de não-quadraticidade (NQ), dada pela Definição 1.2, pois de (R3), temos que  $s + a(x) < s + a_1$ , e assim,  $Q(s + a_1) \leq Q(s + a(x))$ , com  $Q(s + a_1)$  satisfazendo as condições de (NQ), pela mesma argumentação feita para a função  $F$  no Capítulo 1.*

## 2.2 Condição de Cerami

Mostraremos agora que a condição de Cerami é satisfeita pelo funcional  $I_r$  no nível minimax  $d_r$  do Teorema do Passo da Montanha, dado por

$$d_r := \inf_{\gamma \in \Gamma_r} \max_{0 \leq t \leq 1} I_r(\gamma(t)),$$

onde  $\Gamma_r := \{\gamma \in C([0, 1], E_{rad}); \gamma(0) = 0, I_r(\gamma(1)) < 0\}$ . Esta prova está dividida nos dois lemas seguintes:

**Lema 2.4.** *Seja  $(z_n) = (u_n, v_n) \subset E_{rad}$  uma sequência limitada tal que  $|I_r(z_n)| \leq M$  e  $\|I'_r(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ . Então existe  $z \in E_{rad}$  tal que  $\|z_n - z\| \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste fato é análoga à prova do Lema 1.6 do Capítulo 1, onde usamos o fato de estarmos trabalhando em  $E_{rad}$ , e termos as imersões compactas  $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $2 < p < 2^*$  e  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ , com  $1 \leq q < 2^*$ .  $\square$

**Lema 2.5.** *Seja  $(z_n) \subset E_{rad}$  uma sequência tal que  $I_r(z_n) \rightarrow d_r$  e  $\|I'_r(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ . Então tal sequência  $(z_n)$  possui uma subsequência limitada.*

*Demonstração.* Novamente, a prova deste fato segue análoga à prova do Lema 1.9 do Capítulo 1, onde utilizamos a estimativa (2.1) e a condição (R3), juntamente com a Proposição 2.3, na passagem envolvendo o Lema de Fatou.  $\square$

## 2.3 Existência de solução positiva

**Teorema 2.6.** *O sistema  $(P_r)$  possui uma solução radial não-nula  $(u, v)$ .*

*Demonstração.* Conforme verificado no Lema 2.2, temos que o funcional  $I_r$  satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha 1.4. Pelo Princípio Variacional de Ekeland ([22]), temos garantida a existência de uma sequência de Cerami no nível  $d_r$ . Nos Lemas 2.4 e 2.5 mostramos que o funcional  $I_r$  satisfaz a condição de Cerami em tal nível. Assim pelo Teorema 1.4, temos que  $d_r$  é um valor crítico de  $I_r$  e portanto o limite forte da sequência de Cerami  $(z_n)$ ,  $z$ , é um ponto crítico de  $I_r$ , pertencente à  $E_{rad}$  e, conseqüentemente, uma solução fraca de  $(P_r)$ . Como  $d_r > 0$ , temos que tal solução é não-nula. Finalmente, pelo Princípio da Criticalidade Simétrica,  $z$  é um ponto crítico em todo  $E$ , e assim é solução de  $(P_r)$  em  $E$ .  $\square$

# Solução para sistema não-autônomo via comparação de níveis de energia

Neste capítulo, consideraremos o seguinte sistema em  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 3$ :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)} u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)} v + \lambda u \end{cases}$$

com  $0 < \lambda < 1, 0 < s < 1$  e a função  $a$  satisfazendo as seguintes condições:

(A1)  $a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^N$ ;

(A2)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 0$ ;

(A3) existe uma constante  $s_0 > 0$  tal que

$$0 < s_0 < s + a(x) < s, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Temos que o funcional associado ao problema é dado por

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u^2 + v^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} uv dx,$$

onde

$$H(x, u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2(s + a(x))} - \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)),$$

e definimos

$$F(x, u, v) := H(x, u, v) + \lambda uv.$$

Observamos que, devido à condição (A2), o problema limite associado à este problema (P), é o problema estudado no Capítulo 1, que de agora em diante será denotado por  $(P_\infty)$ .

Como a função  $a(x)$  não é radial, não podemos fazer uso das imersões compactas do espaço  $E_{rad}$  para garantir a convergência forte das sequências de Cerami. Para contornar tal situação, provaremos uma versão do resultado de concentração de compacidade, de Lions [31], conhecido como "Lema de Splitting"[48]. Além disto, comparando os níveis de energia entre os funcionais  $I$  e  $I_\infty$ , associado ao problema  $(P_\infty)$ , conseguiremos mostrar que numa faixa específica,  $(0, m_\infty)$ , temos garantida a compacidade e consequentemente a convergência forte das sequências de Cerami. Entretanto, para ser possível fazermos tal comparação entre os níveis, tivemos que impor a condição de que  $I(u, v) < I_\infty(u, v)$ , para todo par  $(u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\}$ , que segue diretamente da hipótese (A1).

### 3.1 Resultados preliminares

Começaremos com a verificação da seguinte relação entre os funcionais  $I$  e  $I_\infty$ . Notemos que  $I_\infty$  é o funcional definido em (1.1).

**Proposição 3.1.** *Para todo  $z \in E \setminus \{(0, 0)\}$ ,*

$$I(z) < I_\infty(z). \quad (3.1)$$

*Demonstração.* Como  $I(z) < I_\infty(z)$  equivale à

$$\frac{\|z\|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(z) dx < \frac{\|z\|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F_\infty(z) dx,$$

em que  $F_\infty$  está definida em (1.2),  $z = (u, v)$  e o termo  $\lambda uv$  é comum às duas funções  $F$  e  $F_\infty$ , temos que mostrar que a função

$$L(t) := \frac{z}{2t} - \frac{1}{2t^2} \ln(1 + tz), t > 0,$$

é decrescente, pois como  $s + a(x) < s$ , então teremos  $L(s) < L(s + a(x))$ , e assim,  $F(z) > F_\infty(z)$ , como desejamos. Entretanto, isto segue diretamente da Proposição 2.1.  $\square$

**Observação 3.1.** *Como nos capítulos anteriores, utilizamos a condição de não-quadraticidade para obter a limitação das sequências de Cerami, mas pela Proposição 2.3, como  $s + a(x) < s$ , temos que*

$$Q(s) < Q(s + a(x)).$$

*A função  $Q(s)$  está associada à condição de não-quadraticidade da função  $F_\infty$  e  $Q(s+a(x))$  está associada à condição de não-quadraticidade para a função  $F$ . Portanto, como a função  $F_\infty$  satisfaz a condição de não-quadraticidade, temos que a função  $F$  também satisfaz tal condição.*

Verificaremos agora que o funcional  $I$  satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha.

**Proposição 3.2.** *O funcional  $I$  satisfaz as condições  $(\mathcal{I}_1)$  e  $(\mathcal{I}_2)$  do Teorema 1.4.*

*Demonstração.* Facilmente verificamos que  $I(0, 0) = 0$  e que existe  $e \in E$  tal que  $I(e) < 0$ , pois a condição  $(\mathcal{I}_2)$  é verificada para o funcional  $I_\infty$  e  $I(e) < I_\infty(e) < 0$  pela Proposição 3.1. Para a condição  $(\mathcal{I}_1)$ , observamos que, pela hipótese  $(A3)$  e com argumentos análogos aos usados no Capítulo 1, Proposição 1.5, podemos mostrar que fixado  $2 < p < 2^*$  e dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M(\varepsilon) > 0$  tal que

$$|H(x, z)| \leq z^2 \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) + M(\varepsilon)z^p, \quad 2 < p < 2^*. \quad (3.2)$$

Com tal estimativa, o argumento segue análogo ao do caso do funcional  $I$  considerado no Capítulo 1.  $\square$

## 3.2 Existência e limitação de sequências de Cerami

Consideremos  $\bar{z}$ , a solução radial positiva de energia mínima de  $(P_\infty)$ , encontrada no Capítulo 1. Na demonstração do Lema 1.14, vimos que existe  $L > 0$  tal que  $I_\infty(\bar{z}(\frac{x}{L})) < 0$ . Façamos  $z_1(x) := \bar{z}(\frac{x}{L})$  e  $z_0(x) := (0, 0)$ . Pela Proposição 3.1, temos que  $I(z_1) < I_\infty(z_1) < 0$ , e definimos

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

onde  $\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], E) : \gamma(0) = z_0; \gamma(1) = z_1\}$ . Com isto, podemos enunciar e demonstrar o seguinte resultado:



**Lema 3.3.** *Existe uma seqüência  $(z_n) = (u_n, v_n) \subset E$  satisfazendo  $I(z_n) \rightarrow c$  e  $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* A existência de tal seqüência estará garantida se pudermos aplicar o Teorema de Ghoussoub-Preiss (ver Teorema A.2, no Apêndice). De fato, para mostrarmos a existência de uma seqüência de Cerami convergindo para  $c$ , como definido acima, precisamos apenas mostrar que existe um conjunto fechado  $\mathcal{F} \subset E$  tal que  $\mathcal{F} \cap I_c$  separa  $z_0$  e  $z_1$ , como definidos acima, onde  $I_c := \{z \in E; I(z) \geq c\}$ , é um subconjunto fechado de  $E$ .

Tomemos então

$$\mathcal{F} := \{z \in E; I_\infty(z) \geq 0\},$$

que é claramente fechado. Temos que  $z_0$  e  $z_1$  não pertencem à  $\mathcal{F} \cap I_c$ , pois ambos não pertencem à  $I_c$ . Podemos pensar em  $E \setminus \mathcal{F} \cap I_c$  como sendo

$$\{z \in E; I(z) < c, I_\infty(z) \geq 0\} \cup \{z \in E; I(z) < c, I_\infty(z) < 0\}.$$

Observamos que, a princípio, ainda teríamos  $\{z \in E; I(z) \geq c, I_\infty(z) < 0\}$ , mas tal conjunto é vazio, pois  $I(z) < I_\infty(z)$  para todo  $z \in E$  e  $c > 0$ .

Assim, da demonstração da Proposição 3.2, segue que existe  $\rho > 0$  tal que se  $0 < \|z\| < \rho$ , então  $I(z) > 0$ . Portanto, existe uma bola aberta  $B_\alpha(0)$ , contendo  $z_0$  e existe uma componente conexa  $C_1$  de  $\{z \in E; I(z) < c, I_\infty(z) \geq 0\}$  tal que  $B_\alpha(0) \subset C_1$ . Por outro lado,  $z_1$  pertence a uma das componentes conexas de  $\{z \in E; I(z) < c, I_\infty(z) < 0\}$ . Assim, temos que  $\mathcal{F} \cap I_c$  separa  $z_0$  e  $z_1$  e o resultado segue.  $\square$

**Lema 3.4.** *Suponha que  $(z_n) \subset E$  é tal que  $I(z_n) \rightarrow c$  e  $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ . Então  $(z_n)$  possui uma subseqüência limitada.*

*Demonstração.* A demonstração deste lema está baseada na demonstração do Lema 1.9, onde verificamos o mesmo fato para o funcional  $I_\infty$ . Por contradição, suponhamos que  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ . Definamos  $\hat{z}_n := \frac{z_n}{\|z_n\|}$ . Então  $(\hat{z}_n)$  é uma seqüência limitada com  $\|\hat{z}_n\| = 1$  e, conseqüentemente, a menos de subseqüências,  $\hat{z}_n \rightharpoonup \hat{z} \in E$ . Assim, um dos dois casos abaixo ocorre:

$$\text{caso 1 : } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{z}_n|^2 dx > 0;$$

$$\text{caso 2 : } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{z}_n|^2 dx = 0.$$

Vamos mostrar que nenhum dos casos pode ocorrer, obtendo uma contradição para

cada caso. Começaremos pelo caso 2. Conforme feito na demonstração do Lema 1.9, podemos mostrar a seguinte desigualdade, análoga à (1.17):

$$\frac{t^2}{2} \|z_n\|^2 \leq \frac{1+t^2}{2n} + c + o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N} F(x, tz_n) dx \quad (3.3)$$

para  $n$  suficientemente grande e  $\forall t > 0$ .

Ainda, da estimativa (3.2), análoga à estimativa (1.4), utilizada no Capítulo 1, a verificação de que o caso 2 não pode ocorrer segue como na prova do Lema 1.9.

Suponhamos agora que o caso 1 ocorra. Pela Proposição 2.3, temos que para todo  $x \in \mathbb{R}^N$

$$0 \leq \frac{1}{2} \nabla F_\infty(z)z - F_\infty(z) \leq \frac{1}{2} \nabla F(x, z)z - F(x, z). \quad (3.4)$$

Portanto, a verificação de que o caso 1 não ocorre segue idêntica à do Lema 1.9, até o ponto onde aplicamos a condição  $(NQ)$  e o Lema de Fatou. Assim, aqui temos

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \nabla F(x, z_n(x + y_n))(z_n(x + y_n)) - F(x, z_n(x + y_n)) dx \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla F(x, z_n(x + y_n))(z_n(x + y_n)) - F(x, z_n(x + y_n)) dx \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla F_\infty(z_n(x + y_n))(z_n(x + y_n)) - F_\infty(z_n(x + y_n)) dx \\ & \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \nabla F_\infty(z_n(x + y_n))(z_n(x + y_n)) - F_\infty(z_n(x + y_n)) dx \\ & = +\infty \end{aligned}$$

A partir deste ponto, a prova segue novamente análoga à do Lema 1.9.  $\square$

### 3.3 Resultado de compacidade

Nesta seção, provaremos um resultado de concentração de compacidade, também conhecido como lema de "Splitting", para o nosso problema  $(P)$ , enunciado no início deste capítulo. No que segue, utilizaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [12]:

**Lema 3.5.** (*Lema de Brezis-Lieb*) Considere  $j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua com  $j(0) = 0$ . Em adição, considere  $j$  satisfazendo as seguintes hipóteses: para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno existem duas funções contínuas e não negativas  $\varphi_\varepsilon$  e  $\psi_\varepsilon$  tais que

$$|j(a + b) - j(a)| \leq \varepsilon \varphi_\varepsilon(a) + \psi_\varepsilon(b)$$

para todo  $a, b \in \mathbb{C}$ . Considere  $f_n = f + g_n$  uma sequência de funções mensuráveis de  $\Omega$  em  $\mathbb{C}$  tais que:

- (i)  $g_n \rightarrow 0$  qtp em  $\Omega$ ;
- (ii)  $j(f) \in L^1$ ;
- (iii)  $\int \varphi_\varepsilon(g_n(x)) d\mu(x) \leq C < \infty$  para alguma constante  $C$ , independente de  $\varepsilon$  e  $n$ ;
- (iv)  $\int \psi_\varepsilon(f(x)) d\mu(x) < \infty$ , para todo  $\varepsilon > 0$ .

Então, se  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\int |j(f + g_n) - j(g_n) - j(f)| d\mu \rightarrow 0.$$

**Observação 3.2.** Se  $j(t) = |t|^p, 0 < p < \infty$ , as hipóteses (ii) – (iv) são simplesmente que  $f \in L^p$  e  $(g_n)$  são uniformemente limitadas em  $L^p$ , (vide [12], exemplo (a)).

**Lema 3.6.** (Splitting) Seja  $z_n = (u_n, v_n) \subset E$  uma sequência limitada tal que  $I(z_n) \rightarrow c$  e  $\|I'(z_n)\| (1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ . Então substituindo  $(z_n)$  por uma subsequência, caso necessário, existe uma solução  $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$  de  $(P)$ , um número  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k$  pares de funções  $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$  e  $k$  sequências de pontos  $\{y_n^j\}$ ,  $y_n^j \in \mathbb{R}^N, 1 \leq j \leq k$ , satisfazendo:

- (i)  $(u_n, v_n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  em  $E$  ou
- (ii)  $|y_n^j| \rightarrow \infty, |y_n^j - y_n^i| \rightarrow \infty$ , se  $j \neq i$ ;
- (iii)  $(u_n, v_n) - \sum_{j=1}^k (u_j(x - y_n^j), v_j(x - y_n^j)) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  em  $E$ ;
- (iv)  $I(z_n) \rightarrow I(\bar{z}) + \sum_{j=1}^k I_\infty(z_j)$ ;
- (v)  $z_j = (u_j, v_j)$  são soluções fracas não triviais de  $(P_\infty)$ .

*Demonstração.* Como  $(z_n)$  é limitada, temos que  $z_n \rightharpoonup \bar{z}$  em  $E$ . Mostraremos que  $I'(\bar{z}) = 0$ . Da imersão compacta de  $H^1(\mathbb{R}^N)$  em  $L_{loc}^r(\mathbb{R}^N), 1 \leq r < 2^*$ , temos que  $u_n \rightarrow \bar{u}$  e  $v_n \rightarrow \bar{v}$  em  $L_{loc}^r(\mathbb{R}^N)$ . Logo, se  $K_i$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^N$ , temos que

$$u_n(x) \rightarrow \bar{u}(x), \text{ qtp } x \in K_1,$$

$$v_n(x) \rightarrow \bar{v}(x), \text{ qtp } x \in K_2,$$

e existem funções  $h(x), l(x) \in L^r_{loc}(K)$ , onde  $K = K_1 \cup K_2$ , tais que:

$$|u_n(x)|, |\bar{u}(x)| \leq h(x), \text{ qtp } x \in K,$$

$$|v_n(x)|, |\bar{v}(x)| \leq l(x), \text{ qtp } x \in K.$$

Fixamos  $\varphi$  e  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  e consideramos  $K = K_1 \cup K_2 = \text{supp}\varphi \cap \text{supp}\psi$ . Então para quase todo  $x \in K$

$$\left[ \frac{u_n^2 + v_n^2}{1 + (s + a(x))(u_n^2 + v_n^2)} u_n + \lambda v_n \right] \varphi(x) \rightarrow \left[ \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{1 + (s + a(x))(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)} \bar{u} + \lambda \bar{v} \right] \varphi(x),$$

$$\left[ \frac{u_n^2 + v_n^2}{1 + (s + a(x))(u_n^2 + v_n^2)} v_n + \lambda u_n \right] \psi(x) \rightarrow \left[ \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}{1 + (s + a(x))(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)} \bar{v} + \lambda \bar{u} \right] \psi(x).$$

Além disso, pelo Lema 1.8 com  $q = 0$  e (A3), temos para quase todo  $x \in K$

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_n^2 + v_n^2}{1 + (s + a(x))(u_n^2 + v_n^2)} u_n + \lambda v_n \right| |\varphi(x)| &\leq \|\varphi\|_\infty \left| \frac{C u_n}{s + a(x)} + \lambda v_n \right| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \left( \frac{C h(x)}{s + a(x)} + \lambda l(x) \right) \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \left( \frac{C h(x)}{s_0} + \lambda l(x) \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_n^2 + v_n^2}{1 + (s + a(x))(u_n^2 + v_n^2)} v_n + \lambda u_n \right| |\psi(x)| &\leq \|\psi\|_\infty \left| \frac{C v_n}{s + a(x)} + \lambda u_n \right| \\ &\leq \|\psi\|_\infty \left( \frac{C l(x)}{s + a(x)} + \lambda h(x) \right) \\ &\leq \|\psi\|_\infty \left( \frac{C l(x)}{s_0} + \lambda h(x) \right) \end{aligned}$$

onde temos  $\|\varphi\|_\infty \left( \frac{C h(x)}{s_0} + \lambda l(x) \right)$  e  $\|\psi\|_\infty \left( \frac{C l(x)}{s_0} + \lambda h(x) \right) \geq 0$  e pertencentes à  $L^1(K)$ . Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(u_n, v_n)(\varphi, \psi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(\bar{u}, \bar{v})(\varphi, \psi) dx, \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, pela convergência fraca de  $u_n \rightharpoonup \bar{u}$  e  $v_n \rightharpoonup \bar{v}$ , temos para todo par

$(\varphi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla \varphi + u_n \varphi + \nabla v_n \nabla \psi + v_n \psi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \bar{u} \nabla \varphi + \bar{u} \varphi + \nabla \bar{v} \nabla \psi + \bar{v} \psi) dx.$$

Então,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I'(u_n, v_n)(\varphi, \psi) = I'(\bar{u}, \bar{v})(\varphi, \psi) \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

e portanto, como  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  é denso em  $E$ ,

$$I'(\bar{u}, \bar{v}) = 0.$$

Vamos então agora supor que  $(u_n, v_n)$  não converge forte à  $(\bar{u}, \bar{v})$ . Seja  $z_{n,1} := z_n - \bar{z} = (u_n - \bar{u}, v_n - \bar{v})$ . Assim, temos que  $z_{n,1} \rightharpoonup 0$ . Iremos mostrar que

$$\text{a) } \|z_{n,1}\|^2 = \|z_n\|^2 - \|\bar{z}\|^2 + o_n(1)$$

$$\text{b) } I_\infty(z_{n,1}) \rightarrow c - I(\bar{z})$$

$$\text{c) } I'_\infty(z_{n,1}) \rightarrow 0.$$

(a) Como  $z_n \rightharpoonup \bar{z}$  em  $E$ , então  $\langle z_n, \bar{z} \rangle \rightarrow \langle \bar{z}, \bar{z} \rangle = \|\bar{z}\|^2$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|z_{n,1}\|^2 &= \|z_n - \bar{z}\|^2 = \langle z_n - \bar{z}, z_n - \bar{z} \rangle \\ &= \langle z_n, z_n \rangle - \langle z_n, \bar{z} \rangle - \langle \bar{z}, z_n \rangle + \langle \bar{z}, \bar{z} \rangle \\ &= \|z_n\|^2 - 2\langle z_n, \bar{z} \rangle + \|\bar{z}\|^2 \\ &= \|z_n\|^2 - \|\bar{z}\|^2 + o_n(1) \end{aligned}$$

(b) Temos que

$$\begin{aligned} I_\infty(z_{n,1}) - I(z_n) + I(\bar{z}) &= \frac{1}{2} \|z_{n,1}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F_\infty(z_{n,1}) dx - \frac{1}{2} \|z_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} F(z_n) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\bar{z}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{z}) dx \\ &= o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^N} F_\infty(z_{n,1}) dx + \int_{\mathbb{R}^N} F(z_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(\bar{z}) dx \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{R}^N} F(z_{n,1}) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(z_{n,1}) dx \right) \\ &= o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^N} (F_\infty(z_{n,1}) - F(z_{n,1})) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (F(z_n) - F(\bar{z}) - F(z_{n,1})) dx \end{aligned}$$

onde usamos o item (a).

**Afirmção 2.**  $\int_{\mathbb{R}^N} (F_\infty(z_{n,1}) - F(z_{n,1})) dx = o_n(1).$

**Afirmção 3.**  $\int_{\mathbb{R}^N} |F(z_n) - F(\bar{z}) - F(z_{n,1})| dx = o_n(1).$

Portanto,  $I_\infty(z_{n,1}) - I(z_n) + I(\bar{z}) = o_n(1)$ , o que implica em

$$I_\infty(z_{n,1}) \rightarrow c - I(\bar{z}),$$

visto que  $I(z_n) \rightarrow c$ . Assim concluímos a prova de (b).

Vamos agora verificar as afirmações acima.

*Verificação da Afirmção 2:* Recordamos que

$$F_\infty(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) + \lambda uv$$

e

$$F(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2(s + a(x))} - \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)) + \lambda uv.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_\infty(z) - F(z) &= \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s + a(x))} \right) (u^2 + v^2) - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) \\ &\quad + \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)). \end{aligned}$$

Temos que  $z_{n,1} \rightharpoonup 0$ , então,  $z_{n,1} \rightarrow 0$  em  $L^p(B_R(0))$ , para  $2 \leq p < 2^*$ . Vamos primeiramente mostrar que

$$\int_{B_R(0)} F_\infty(z_{n,1}) - F(z_{n,1}) dx = o_n(1).$$

De fato, utilizando a hipótese (A3), temos

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} \left| \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s + a(x))} \right) (u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2) \right| dx &\leq \int_{B_R(0)} \frac{1}{(s + a(x))} (u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2) dx \\ &\leq \frac{1}{s_0} \|z_{n,1}\|_2^2 \rightarrow 0 \text{ em } B_R(0). \end{aligned}$$

Para a segunda parte, temos:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{B_R(0)} -\frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) + \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \right| \\
& \leq \int_{B_R(0)} \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \\
& + \int_{B_R(0)} \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \\
& \leq \int_{B_R(0)} \left( \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2(s + a(x))^2} \right) \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \\
& \leq \int_{B_R(0)} \left( \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2(s + a(x))^2} \right) s z_{n,1}^2 dx \leq \int_{B_R(0)} \frac{1}{(s + a(x))^2} s z_{n,1}^2 dx \\
& \leq \frac{s}{s_0^2} \int_{B_R(0)} z_{n,1}^2 dx = \frac{s}{s_0^2} \|z_{n,1}\|_2^2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

utilizando (A3) e o fato que  $\ln(1 + sz) \leq sz$ , para todo  $z = \sqrt{u^2 + v^2} \geq 0$ . Portanto,

$$\int_{B_R(0)} F_\infty(z_{n,1}) - F(z_{n,1}) dx = o_n(1),$$

e o comportamento da integral sobre a bola está completamente descrito. Vamos agora analisar a integral sobre o exterior da bola  $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$ . Analisaremos primeiramente a integral

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s + a(x))} \right) (u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2) dx.$$

Pela hipótese (A2), temos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $R > 0$  tal que se  $|x| > R$ , então

$$\left| \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s + a(x))} \right| < \varepsilon,$$

o que implica que

$$\left| \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s + a(x))} \right) (u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2) dx \right| \leq \varepsilon \int_{\Omega} (u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2) dx \leq \varepsilon \|z_{n,1}\|_2^2 \leq \varepsilon M,$$

pois  $(z_{n,1})$  é limitada e, portanto, esta parte está verificada, bastando considerar  $R > 0$  suficientemente grande.

Vamos agora analisar

$$\int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) + \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) \right) dx.$$

Primeiramente, vamos mostrar que a função do integrando é sempre positiva. Como estamos somente interessados no comportamento da função  $a(x)$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , pensaremos em  $z_{n,1} = z$ , uma constante e analisaremos a função

$$f(t) = \frac{1}{2t^2} \ln(1 + tz)$$

onde  $t = s + a(x)$ , e  $0 < t < s$ . Como  $s + a(x) < s$ , mostraremos que  $f$  é decrescente, assim  $f(s) < f(s + a(x))$  e portanto  $-f(s) + f(s + a(x)) > 0$ , o que equivale à

$$-\frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) + \frac{1}{2(s + a(x))} \ln(1 + (s + a(x))(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) > 0. \quad (3.5)$$

Temos que

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\frac{1}{t^3} \ln(1 + tz) + \frac{1}{2t^2} \frac{z}{1 + tz} \\ &= \frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{2} \frac{z}{1 + tz} - \frac{1}{t} \ln(1 + tz) \right) \end{aligned}$$

Queremos mostrar que  $f'(t) < 0$ . Consideremos então a função  $h(y) := y \ln y + \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$ . Temos que

$$h'(y) = \ln y + \frac{1}{2} > 0, \forall y > 1.$$

Assim,

$$h(y) \geq h(1) = 0, \forall y > 1.$$

Então, se  $y = 1 + zt > 1$ , temos que

$$\begin{aligned} (1 + zt) \ln(1 + zt) + \frac{1}{2} - \frac{1 + zt}{2} &> 0 \\ (1 + zt) \ln(1 + zt) &> \frac{1}{2}(1 + zt) - \frac{1}{2} \\ (1 + zt) \ln(1 + zt) &> \frac{zt}{2} \\ \frac{1}{t} \ln(1 + zt) &> \frac{z}{2(1 + zt)} \end{aligned}$$

ou seja,  $f'(t) < 0$  se  $1 + zt > 1$ , o que é sempre válido, pois  $zt > 0$ . Portanto a função  $f(t) = \frac{1}{2t^2} \ln(1 + zt)$  é sempre decrescente, e como  $s + a(x) < s$ , temos que  $f(s) < f(s + a(x))$ , ou seja, (3.5) é válida.



Então,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} -\frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) + \frac{1}{2(s+a(x))^2} \ln(1 + (s+a(x))(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \right| \\
&= \int_{\Omega} -\frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) + \frac{1}{2(s+a(x))^2} \ln(1 + (s+a(x))(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \\
&\leq \int_{\Omega} -\frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) + \frac{1}{2(s+a(x))^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \\
&= \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2(s+a(x))^2} \right) \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2(s+a(x))^2} \right) s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2) dx.
\end{aligned}$$

Novamente por (A2), dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $R > 0$  tal que se  $|x| > R$ , então

$$\left| -\frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2(s+a(x))^2} \right| < \varepsilon,$$

e, portanto, temos que

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} -\frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) + \frac{1}{2(s+a(x))^2} \ln(1 + (s+a(x))(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)) dx \right| \\
&\leq \varepsilon s \|z_{n,1}\|_2^2,
\end{aligned}$$

e o resultado segue. Concluimos assim a verificação da Afirmação 2.

*Verificação da Afirmação 3:* Vamos agora mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(z_n) - F(\bar{z}) - F(z_{n,1})| dx = o_n(1).$$

Consideremos a função

$$F(u, v) = H(u, v) - \hat{F}(u, v),$$

em que

$$H(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2(s+a(x))} - \frac{1}{2(s+a(x))^2} \ln(1 + (s+a(x))(u^2 + v^2))$$

e

$$\hat{F}(u, v) = \lambda uv.$$

Temos que  $\nabla \hat{F}(u, v) = (\lambda v, \lambda u)$ , o que implica

$$\left| \nabla \hat{F}(u, v) \right| = \sqrt{\lambda^2(u^2 + v^2)} = \lambda \lfloor (u, v) \rfloor,$$

onde  $[\cdot]$  representa a norma euclidiana de  $\mathbb{R}^2$ . Então

$$\begin{aligned}
 |\hat{F}(\xi - t\theta) - \hat{F}(\xi)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \hat{F}(\xi - t\theta) dt \right| \\
 &= \left| \int_0^1 \nabla \hat{F}(\xi - t\theta)(-\theta) dt \right| \\
 &\leq \int_0^1 [\nabla \hat{F}(\xi - t\theta)] [\theta] dt \\
 &= \lambda \int_0^1 [\xi - t\theta] [\theta] dt \\
 &\leq \lambda \int_0^1 ([\xi] + t [\theta]) [\theta] dt \\
 &= \lambda \left[ [\xi] [\theta] + \frac{[\theta]^2}{2} \right] \\
 &\leq \lambda \left[ \varepsilon [\xi]^2 + \frac{[\theta]^2}{4\varepsilon} + \frac{[\theta]^2}{2} \right] \\
 &= \varepsilon \varphi_\varepsilon(\xi) + \psi_\varepsilon(\theta)
 \end{aligned}$$

onde  $\varphi_\varepsilon(\xi) = \lambda [\xi]^2$  e  $\psi_\varepsilon(\theta) = \lambda \left( \frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) [\theta]^2$ .

Assim, tomando  $z_n = \bar{z} + z_{n,1}$ , e sabendo que  $z_{n,1} \rightarrow 0$  em quase todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , podemos aplicar o Lema 3.5 e concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\hat{F}(z_n) - \hat{F}(\bar{z}) - \hat{F}(z_{n,1})| dx = o_n(1).$$

Agora, consideremos  $H(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2(s + a(x))} - \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u^2 + v^2))$ .

Temos que

$$\nabla H(u, v) = \left( \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)} u, \frac{u^2 + v^2}{1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)} v \right),$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
[\nabla H(u, v)]^2 &= \frac{(u^2 + v^2)^2}{(1 + (s + a(x))(u^2 + v^2))^2} (u^2 + v^2) \\
&= \left( \frac{z^2}{1 + (s + a(x))z^2} \right)^2 z^2 \\
&\leq \left( \frac{z^2}{1 + s_0^2 z^2} \right)^2 z^2 \\
&\leq \frac{C(q)^2}{s_0^2} |z|^{2q} z^2 \\
&= \frac{C(q)^2}{s_0^2} [(u, v)]^{2q+2}
\end{aligned}$$

onde usamos o Lema 1.8 e (A3). Assim,

$$[\nabla H(u, v)] \leq \frac{C(q)}{s_0} [(u, v)]^{q+1}.$$

Utilizando um argumento análogo ao anterior, podemos mostrar que

$$|H(\xi - t\theta) - H(\xi)| \leq C (\varepsilon [\xi]^{q+1} + (C_\varepsilon) [\theta]^{q+1}).$$

Portanto, novamente pelo Lema 3.5, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |H(z_n) - H(z_{n,1}) - H(\bar{z})| dx = o_n(1).$$

Assim, a Afirmação 3 está verificada.

Vamos agora verificar (c):  $I'_\infty(z_{n,1}) = o_n(1)$ . Temos,  $\forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ , que

$$I'_\infty(z_{n,1})(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_{n,1} \nabla \varphi + \nabla v_{n,1} \nabla \psi + u_{n,1} \varphi + v_{n,1} \psi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F_\infty(z_{n,1})(\varphi, \psi) dx.$$

Como  $u_{n,1}, v_{n,1} \rightharpoonup 0$  em  $E$ , pela definição de produto interno temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_{n,1} \nabla \varphi + u_{n,1} \varphi dx \rightarrow 0 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_{n,1} \nabla \psi + v_{n,1} \psi dx \rightarrow 0.$$

Para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F_\infty(z_{n,1})(\varphi, \psi) dx \rightarrow 0,$$

observamos que  $(z_{n,1})$  é limitada e  $z_{n,1} \rightarrow 0$  em quase todo  $x \in \mathbb{R}^N$ . Então, pelo Lema

1.7, identicamente à forma como ele foi utilizado na demonstração do Lema 1.6, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F_\infty(z_{n,1})(\varphi, \psi) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla F_\infty(0)(\varphi, \psi) dx = 0,$$

pois  $\nabla F_\infty(0, 0) = 0$ . Portanto, (c) é verificada.

Temos ainda que

$$0 = I'_\infty(z_{n,1})(z_{n,1}) + o_n(1),$$

ou seja,

$$\|u_{n,1}\|^2 + \|v_{n,1}\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_{n,1}v_{n,1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)^2}{1 + s(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)} dx + o_n(1). \quad (3.6)$$

Como estamos considerando que  $z_{n,1} \rightharpoonup 0$  em  $E$ , tomemos

$$\delta_u := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_{n,1}|^2 dx$$

e

$$\delta_v := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |v_{n,1}|^2 dx.$$

Se  $\delta_u = \delta_v = 0$ , então, segue do Lema de Lions ( Lema 1.2 de [51]) que

$$u_{n,1}, v_{n,1} \rightarrow 0$$

em  $L^{2+q}(\mathbb{R}^N)$ , com  $2 < 2 + q < 2^*$ . Assim, usando (3.6) e o Lema 1.8 novamente, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1 - \lambda)(\|u_{n,1}\|^2 + \|v_{n,1}\|^2) \\ &= \|u_{n,1}\|^2 + \|v_{n,1}\|^2 - \lambda(\|u_{n,1}\|^2 + \|v_{n,1}\|^2) \\ &\leq \|u_{n,1}\|^2 + \|v_{n,1}\|^2 - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_{n,1}v_{n,1} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)^2}{1 + (s + a(x))(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)} dx + o_n(1) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)^2}{1 + s_0(u_{n,1}^2 + v_{n,1}^2)} dx + o_n(1) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{C(q)}{s_0} (z_{n,1})^{q+2} dx + o_n(1) \end{aligned}$$

Portanto  $u_{n,1}, v_{n,1} \rightarrow 0$  em  $E$ , o que é uma contradição.

Suponhamos então, sem perda de generalidade, que  $\delta_u > 0$ . Então existe uma

sequência  $(y_n^1) \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$\int_{B_1(y_n^1)} |u_{n,1}|^2 dx > \frac{\delta_u}{2}.$$

Consideremos agora a sequência  $(u_{n,1}(\cdot + y_n^1), v_{n,1}(\cdot + y_n^1))$ . Podemos assumir que tal sequência satisfaz

$$(u_{n,1}(\cdot + y_n^1), v_{n,1}(\cdot + y_n^1)) \rightharpoonup (u_1, v_1) \text{ em } E$$

e

$$(u_{n,1}(\cdot + y_n^1), v_{n,1}(\cdot + y_n^1)) \rightarrow (u_1, v_1), \text{ qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Como

$$\int_{B_1(0)} |u_{n,1}(x + y_n^1)|^2 dx > \frac{\delta_u}{2},$$

segue pelo teorema de Rellich que

$$\int_{B_1(0)} |u_1(x)|^2 dx \geq \frac{\delta_u}{2},$$

e assim  $u_1 \not\equiv 0$ . Mas  $(u_{n,1}, v_{n,1}) \rightharpoonup (0, 0)$  em  $E$ , então  $(y_n^1)$  é ilimitada e, a menos de subsequências, podemos assumir que  $|y_n^1| \rightarrow \infty$ . Além disto, como  $I'_\infty(u_{n,1}, v_{n,1}) = o_n(1)$  em  $E$ , podemos deduzir que  $z_1 := (u_1, v_1)$  é uma solução fraca de  $(P_\infty)$ . Definamos agora

$$(u_{n,2}(x), v_{n,2}(x)) := (u_{n,1}(x) - u_1(x - y_n^1), v_{n,1}(x) - v_1(x - y_n^1)).$$

Então, como anteriormente, temos que:

- a)  $\|z_{n,2}\|^2 = \|z_n\|^2 - \|\bar{z}\|^2 - \|z_1\|^2 + o_n(1);$
- b)  $I_\infty(z_{n,2}) \rightarrow c - I(\bar{z}) - I_\infty(z_1);$
- c)  $I'_\infty(z_{n,2}) \rightarrow 0.$

De fato, para (a), temos que

$$\begin{aligned} \langle z_{n,2}, z_{n,2} \rangle &= \langle z_{n,1} - z_1, z_{n,1} - z_1 \rangle \\ &= \langle z_{n,1}, z_{n,1} \rangle - 2 \langle z_{n,1}, z_1 \rangle + \langle z_1, z_1 \rangle \end{aligned}$$

e usando que  $z_{n,1} \rightharpoonup z_1$  e que  $\|z_{n,1}\|^2 = \|z_n\|^2 - \|\bar{z}\|^2 + o_n(1)$ , o resultado segue.

Para (b), temos que

$$\begin{aligned}
 I_\infty(z_{n,2}) - I_\infty(z_{n,1}) + I_\infty(z_1) &= \frac{1}{2} \|z_{n,2}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F_\infty(z_{n,2}) dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \|z_{n,1}\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} F_\infty(z_{n,1}) dx + \frac{1}{2} \|z_1\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F_\infty(z_1) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} F_\infty(z_{n,1}) - F_\infty(z_1) - F_\infty(z_{n,2}) dx
 \end{aligned}$$

e, utilizando uma ideia análoga à da Afirmação 3, podemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F_\infty(z_{n,1}) - F_\infty(z_1) - F_\infty(z_{n,2})| d\mu \rightarrow 0,$$

e portanto o resultado segue.

Para (c), utilizamos argumento semelhante ao da verificação de que  $I'_\infty(z_{n,1}) \rightarrow 0$ . Se  $\|(u_{n,2}, v_{n,2})\| \rightarrow 0$ , concluímos a demonstração. Caso contrário,  $(z_{n,2}) \rightarrow 0$  e não converge forte, e podemos repetir o argumento. Dessa forma, obtemos sequências de pontos  $(y_n^j) \in \mathbb{R}^N$  tais que  $|y_n^j| \rightarrow \infty$ ,  $|y_n^j - y_n^i| \rightarrow \infty$  se  $i \neq j$ , com  $n \rightarrow \infty$ , sequências de pares de funções  $(u_{n,j}(x), v_{n,j}(x)) = (u_{n,j-1}(x) - u_{j-1}(x - y_n^{j-1}), v_{n,j-1}(x) - v_{j-1}(x - y_n^{j-1}))$ ,  $j \geq 2$  tais que

$$(u_{n,j}(x + y_n^j), v_{n,j}(x + y_n^j)) \rightharpoonup (u_j(x), v_j(x)), \text{ em } E,$$

e  $(u_j, v_j)$  é solução fraca de  $(P_\infty)$ . Pelo que vimos no Capítulo 1, temos que  $I_\infty(u_j, v_j) \geq m_\infty > 0$ , onde

$$m_\infty := \inf \{I_\infty(u, v) : (u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\} \text{ e } (u, v) \text{ resolve } (P_\infty)\},$$

e pelo Lema 1.16, temos que  $m_\infty = c_\infty$ , o nível minimax to Teorema do Passo da Montanha para o funcional  $I_\infty$ . Portanto, pela expressão

$$I(z_n) = I(\bar{z}) + I_\infty(z_1) + I_\infty(z_2) + o_n(1),$$

tal iteração deve parar em algum índice  $j \geq 2$  finito. □

**Corolário 3.1.** *O funcional  $I$  satisfaz  $(Ce)_c$ , para todo  $0 < c < m_\infty$ .*

*Demonstração.* Temos que  $I_\infty(u^j, v^j) \geq m_\infty$  para todo par  $(u^j, v^j)$  solução não trivial de  $(P_\infty)$ . Tome  $(u_n, v_n)$  uma sequência  $(Ce)_\beta$  tal que  $\beta < m_\infty$  e aplique o Lema 3.6 à esta sequência. Como  $I(u_n, v_n) < m_\infty$ , obtemos que  $k = 0$  e assim  $(u_n, v_n) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  em  $E$ . □

### 3.4 Existência de solução

Nesta seção, mostraremos então que o sistema  $(P)$  possui uma solução  $(u, v)$  não-nula. Inicialmente, mostraremos que o nível de energia gerado pelo Teorema do Passo da Montanha está na faixa onde temos compacidade, conforme o Corolário 3.1, isto é,

**Lema 3.7.**  $0 < c < m_\infty$ .

*Demonstração.* Recordamos que

$$G(u, v) = -\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{u^2 + v^2}{2(s + a(x))} - \frac{1}{2(s + a(x))^2} \ln(1 + (s + a(x))(u^2 + v^2)) + \lambda uv,$$

e

$$G_\infty(u, v) = -\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{u^2 + v^2}{2s} - \frac{1}{2s^2} \ln(1 + s(u^2 + v^2)) + \lambda uv.$$

Assim, as funções  $G$  e  $G_\infty$  diferem pela função  $L(t) = \frac{z}{2t} - \frac{1}{2t^2} \ln(1 + tz)$ , com  $t > 0$ . Mas, na Proposição 3.1 verificamos que  $L(t)$  é decrescente, e como  $s + a(x) < s$ , então  $L(s) < L(s + a(x))$ , o que implica que

$$G_\infty(z) < G(z), \forall z \in E \setminus \{(0, 0)\}.$$

Tomemos  $\bar{z}$  a solução radial positiva de energia mínima de  $(P_\infty)$ , e consideremos  $z_y(x) = \bar{z}(x - y)$ , para algum  $y \in \mathbb{R}^N$  fixado. Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(z_y(x)) dx &> \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(z_y(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(\bar{z}(x - y)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(\bar{z}(x)) dx > 0 \end{aligned}$$

onde usamos a invariância por translações na integral de  $G_\infty$  e o fato de que, como  $\bar{z}$  é solução de  $(P_\infty)$ , então  $\bar{z}$  satisfaz a identidade de Pohozaev e assim  $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(\bar{z}(x)) dx > 0$ .

Como  $\int_{\mathbb{R}^N} G(z_y) dx > 0$ , segue da demonstração do Lema 1.17 que existe  $0 \leq t_y \leq 1$  tal que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I\left(z_y\left(\frac{x}{t}\right)\right) = I\left(z_y\left(\frac{x}{t_y}\right)\right) = I\left(\bar{z}\left(\frac{x - y}{t_y}\right)\right).$$

Mas

$$\begin{aligned}
 I\left(z_y\left(\frac{x}{t_y}\right)\right) &< I_\infty\left(z_y\left(\frac{x}{t_y}\right)\right) \\
 &= I_\infty\left(\bar{z}\left(\frac{x-y}{t_y}\right)\right) \\
 &= I_\infty\left(\bar{z}\left(\frac{x}{t_y} - \frac{y}{t_y}\right)\right) \\
 &= I_\infty\left(\bar{z}\left(\frac{x}{t_y}\right)\right) \\
 &\leq I_\infty\left(\bar{z}\left(\frac{x}{1}\right)\right) \\
 &= m_\infty
 \end{aligned}$$

onde utilizamos novamente a invariância por translações de  $I_\infty$  e o fato de que  $\bar{z}$  é solução de  $(P_\infty)$  de energia mínima, portanto o máximo no caminho  $\bar{z}(x/t)$  é obtido em  $t = 1$ . Precisamos então construir um caminho  $\gamma \in \Gamma$  tal que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = I\left(z_y\left(\frac{x}{t_y}\right)\right) < m_\infty,$$

relembrando que

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in C([0, 1], E); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = z_1(x) = \bar{z}\left(\frac{x}{L}\right) \right\}.$$

Temos ainda que, se  $t = L$ , então

$$I\left(z_y\left(\frac{x}{L}\right)\right) < I_\infty\left(z_y\left(\frac{x}{L}\right)\right) = I_\infty\left(\bar{z}\left(\frac{x}{L}\right)\right) = I_\infty(z_1(x)) < 0.$$

Portanto,

$$I\left(z_y\left(\frac{x}{L}\right)\right) < 0, \text{ com } L > t_y.$$

Consideremos

$$\beta(t) := \bar{z}\left(\frac{x}{L}t + (1-t)\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{L}\right)\right).$$

Temos que

$$\beta(0) = z_y\left(\frac{x}{L}\right)$$

e

$$\beta(1) = \bar{z}\left(\frac{x}{L}\right) = z_1(x).$$



Assim,  $\beta(t)$  é um caminho ligando  $z_y\left(\frac{x}{L}\right)$  à  $z_1(x)$ . Além disso

$$\begin{aligned} I(\beta(t)) &= I\left(\bar{z}\left(\frac{x}{L}t + (1-t)\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{L}\right)\right)\right) \\ &< I_\infty\left(\bar{z}\left(\frac{x}{L}t + (1-t)\left(\frac{x}{L} - \frac{y}{L}\right)\right)\right) \\ &= I_\infty\left(\bar{z}\left(\frac{x}{L} + \frac{y}{L}t\right)\right) \\ &= I_\infty\left(\bar{z}\left(\frac{x}{L}\right)\right) \\ &= I_\infty(z_1) < 0. \end{aligned}$$

Portanto, o funcional  $I$  é sempre negativo ao longo do caminho  $\beta(t)$ . Seja  $\tilde{\alpha}(t)$  o caminho dado por

$$\tilde{\alpha}(t) := \begin{cases} 0, & t = 0 \\ z_y\left(\frac{x}{t}\right), & 0 < t \leq L \end{cases}$$

e consideremos  $\alpha(t) := \tilde{\alpha}(t/L)$ , um caminho ligando  $z_0 = 0$  à  $z_y\left(\frac{x}{L}\right)$ , passando por  $z_y\left(\frac{x}{t_y}\right)$ , pois  $0 < t_y < L$ . Assim, fazendo  $\gamma(t)$  a composição entre os caminhos  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ , temos que  $\gamma(t) \in \Gamma$  e

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = I\left(z_y\left(\frac{x}{t_y}\right)\right) < m_\infty,$$

e assim,

$$c < m_\infty.$$

□

**Teorema 3.8.** *Suponha que  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < s < 1$  e que (A1 – A3) são satisfeitas. Então o sistema (P) possui uma solução não-nula  $(u, v) \in E$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.2 temos que o funcional  $I$  satisfaz as condições  $(\mathcal{I}_1)$  e  $(\mathcal{I}_2)$  do Teorema 1.4. Pelos Lemas 3.3 e 3.4, temos garantida a existência e a limitação, respectivamente, de sequências de Cerami no nível  $c$ . Pelo Corolário 3.1, temos que o funcional  $I$  satisfaz a condição de Cerami no nível  $c$ , pois  $c < m_\infty$ , desigualdade esta que foi verificada no Lema 3.7. Portanto, podemos aplicar o Teorema 1.4 e concluir a existência de uma solução não-nula para o problema (P). □

**Observação 3.3.** *Até aqui só fizemos uso da propriedade de que  $\frac{\nabla F(tz)z}{tz^2}$  é crescente em  $t$  para mostrar a limitação das sequências de Cerami. Em geral esta propriedade*

---

*é muito utilizada para projetar um vetor  $z = (u, v) \neq (0, 0)$  sobre a variedade de Nehari  $\mathcal{N} := \{(u, v) \in E \setminus \{(0, 0)\}; I'(u, v)(u, v) = 0\}$ . Como utilizamos a variedade de Pohozaev no Capítulo 1 para fazer a comparação entre os níveis de energia, esta hipótese não foi necessária nesse momento.*

# Solução para sistema não-autônomo via Teorema de Linking

Neste capítulo estamos interessados em estudar o seguinte sistema em  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 3$ :

$$(P_a) \begin{cases} -\Delta u + u &= a(x) \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 + v^2)} u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= a(x) \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 + v^2)} v + \lambda u \end{cases}$$

com condições sobre a função  $a(x)$  de tal maneira que tenhamos os funcionais associados à este sistema e ao sistema no infinito, obedecendo a relação  $I_\infty(u, v) \leq I(u, v)$ , situação que não foi estudada no Capítulo 3.

Entretanto, ao buscarmos referências para o caso escalar nestas condições,  $-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u)$ , não encontramos resultados sobre o mesmo. Faremos então o estudo de tal equação e depois apresentaremos a solução para o sistema. Situaremos nossa equação nas condições descritas abaixo, e ressaltamos que não utilizaremos aqui a hipótese de que  $\frac{f(t)}{t}$  é uma função crescente ou não-decrescente. Tal hipótese é imposta quando se deseja fazer uso das propriedades da variedade de Nehari [vide [51], Capítulo 4], e a não-linearidade  $f$  é homogênea. Entretanto, pelo comportamento assintoticamente linear de nossa não-linearidade  $f$ , a mesma é não-homogênea. Para abordar esta situação, trabalharemos com a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$ , associada a tal equação.

Primeiramente, mostraremos que o ínfimo  $p = \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u)$  não é atingido. Isto nos motivará a procurar por soluções em níveis mais altos de energia. Utilizando novamente um resultado de concentração de compacidade na forma do Lema de "Splitting" ([31],[48])

e a chamada função *baricentro*, apresentada em [3], teremos condições para aplicar o Teorema de Linking e garantir a existência de uma solução para a equação.

Optamos por apresentar em detalhes a resolução para o caso de somente uma equação para simplificar os cálculos e assim explicitar com maior clareza as ideias aqui desenvolvidas. As provas dos resultados análogos para o sistema são muito semelhantes às aqui apresentadas e algumas observações sobre as mesmas serão apresentadas na última seção deste capítulo.

Assim, estudaremos a seguinte equação, com  $\lambda > 0$ :

$$-\Delta u + \lambda u = a(x)f(u) \quad (4.1)$$

em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ , onde temos as seguintes condições sobre a função  $a$ :

$$(A1) \quad a \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \text{ com } \inf_{x \in \mathbb{R}^N} a(x) > 0;$$

$$(A2) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = a_\infty > \lambda;$$

$$(A3) \quad \nabla a(x) \cdot x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, \text{ sendo que a desigualdade é estrita num conjunto de medida não nula de } \mathbb{R}^N;$$

$$(A4) \quad a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} < a_\infty, \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

$$(A5) \quad \nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N, \text{ onde } H \text{ representa a matriz Hessiana da função } a,$$

e as seguintes condições sobre a função  $f$ :

$$(f1) \quad f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s} = 0;$$

$$(f2) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} = 1;$$

$$(f3) \quad \text{definindo } F(s) := \int_0^s f(t)dt \text{ e } Q(s) := \frac{1}{2}f(s)s - F(s), \text{ então existe uma constante } D \geq 1 \text{ tal que}$$

$$Q(s) \leq DQ(t), \forall 0 \leq s \leq t,$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Q(s) = +\infty.$$

A condição (A1) nos fornecerá a geometria do Teorema do Passo da Montanha para o funcional  $I$  associado à equação (4.1), e também será utilizada na demonstração da limitação das sequências de Cerami. As condições (A2 – A4) fornecerão a relação  $I_\infty \leq I$  entre o funcional  $I$  e o funcional  $I_\infty$ , associado ao problema limite e, juntamente com a condição (A5), aparecerão naturalmente no desenvolvimento da teoria aqui apresentada envolvendo a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$  associada à equação (4.1).

**Observação 4.1.** *Das condições (A2), (A3) e (A4), e do Teorema do Confronto, temos que*

$$\nabla a(x) \cdot x \rightarrow 0, \text{ quando } |x| \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

**Observação 4.2.** *Conforme feito no trabalho [28] de L. Jeanjean e K. Tanaka, onde tal condição (f3) foi apresentada, temos que*

$$Q(s) \geq 0 \text{ para todo } s \geq 0. \quad (4.3)$$

Neste trabalho é também observado que a condição (f3) é mais geral que a condição comumente utilizada de que  $\frac{f(s)}{s}$  é uma função crescente. Em particular, temos que se  $f$  é diferenciável, então  $\frac{f(s)}{s}$  é crescente se, e somente se (f3) é válida com  $D = 1$ .

De fato,  $\frac{f(s)}{s}$  é crescente se, e somente se

$$\left( \frac{f(s)}{s} \right)' = \frac{f'(s)s - f(s)}{s^2} > 0,$$

ou seja, se para todo  $s > 0$  temos

$$f'(s)s - f(s) > 0. \quad (4.4)$$

Por outro lado, (f3) é válida com  $D = 1$  se, e somente se  $Q(s)$  é crescente, ou seja, se

$$Q'(s) = \frac{1}{2} (f'(s)s + f(s)) - f(s) = \frac{1}{2} (f'(s)s - f(s)) > 0. \quad (4.5)$$

De (4.4) e (4.5) segue a equivalência.

Como exemplo de uma função  $f$  tal que  $\frac{f(s)}{s}$  não é crescente, mas satisfaz a condição (f3), consideramos a seguinte função, definida para  $s \geq 0$

$$f(s) = \frac{s^7 - 1,5s^5 + 2s^3}{1 + s^6}.$$

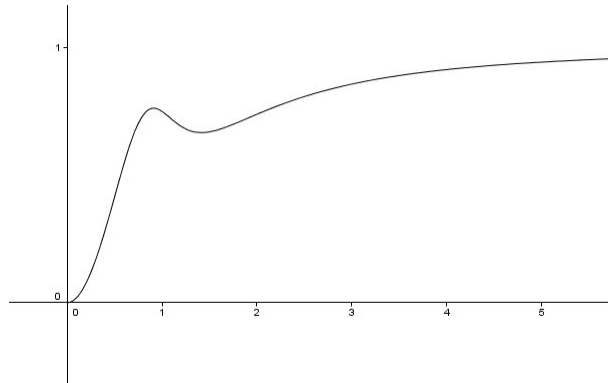


Figura 4.1: Gráfico de  $\frac{f(s)}{s}$ .

Sua primitiva  $F(s)$  é dada por

$$F(s) = \frac{s^2}{2} - \frac{3\sqrt{3} \ln(1+s^2) + 2 \arctan(2s + \sqrt{3}) - 2 \arctan(2s - \sqrt{3})}{4\sqrt{3}}$$

e temos

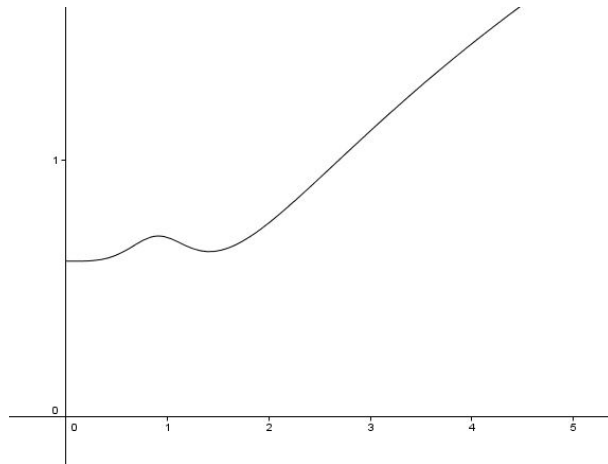


Figura 4.2: Gráfico de  $Q(s) = \frac{1}{2}f(s)s - F(s)$ .

Pela análise do gráfico de  $Q(s)$ , podemos ver que é possível encontrar  $D > 1$  tal que  $(f3)$  seja válida.

Trabalharemos neste capítulo com a norma  $\|u\|_\lambda = \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx \right)^{1/2}$ , equivalente à norma usual  $\|\cdot\|$  de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Assim, definimos  $E_\lambda := (H^1(\mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\lambda)$ .

**Observação 4.3.** Assumiremos neste capítulo que  $f(s)$  é definida para todo  $s \in \mathbb{R}$  e

$f(s) = 0$  se  $s \leq 0$ . Assim, sabendo que os pontos críticos do funcional

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u) dx$$

associados à equação (4.1) são as soluções fracas da equação, temos que se  $u$  é um ponto crítico de  $I$ , então

$$\begin{aligned} 0 &= I'(u)u^- = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u^- + \lambda u u^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u) u^- dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^2 + \lambda |u^-|^2 dx = \|u^-\|_\lambda^2, \end{aligned}$$

onde  $u^- := \min\{u, 0\}$ . Assim, necessariamente temos  $u \geq 0$ .

Um problema modelo de (4.1) é dado por

$$-\Delta u + \lambda u = a(x) \frac{u^3}{1 + u^2},$$

com  $a(x) = a_\infty - \frac{1}{|x| + k}$ , onde  $k > \frac{1}{a_\infty}$ . Neste caso, temos  $F(s) = \frac{1}{2}(s^2 - \ln(1 + s^2))$ . As condições sobre a função  $f$  são facilmente verificadas. Para a função  $a$ , claramente se verifica a condição (A2). Para (A1), podemos ter problemas quando  $|x|$  é próximo de zero, mas contornamos esse problema assumindo que  $k > 1/a_\infty$ . Temos que

$$\nabla a(x) \cdot x = \frac{|x|}{(|x| + k)^2},$$

o que verifica a condição (A3). Para (A4), temos

$$\begin{aligned} a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} &= a_\infty - \frac{1}{|x| + k} + \frac{|x|}{N(|x| + k)^2} \\ &= a_\infty - \frac{(N(|x| + k)) - |x|}{N(|x| + k)^2} \\ &= a_\infty - \frac{|x|(N - 1) + Nk}{N(|x| + k)^2} < a_\infty \end{aligned}$$

pois estamos considerando sempre que  $N \geq 3$ .

Para terminar, observamos que  $x \cdot H(x) \cdot x = -\frac{2|x|^2}{(|x|+k)^3}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} &= \frac{|x|}{(|x|+k)^2} - \frac{2|x|^2}{N(|x|+k)^3} \\ &= \frac{N|x|(|x|+k) - 2|x|^2}{N(|x|+k)^3} \\ &= \frac{N|x|^2 + Nk|x| - 2|x|^2}{N(|x|+k)^3} \\ &= \frac{|x|^2(N-2)}{N(|x|+k)^2} + \frac{k|x|}{(|x|+k)^2}. \end{aligned}$$

Como estamos considerando que  $N \geq 3$ , segue que

$$\nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \geq 0.$$

Apresentaremos agora uma estimativa envolvendo a função  $F$ , que utilizaremos várias vezes ao decorrer deste capítulo. Da condição (f1) e lembrando que  $F(s) = \int_0^s f(t)dt \geq 0$ , temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{s^2} = 0,$$

ou seja, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|s| < \delta$  então

$$|F(s)| < \frac{\varepsilon}{2}|s|^2.$$

Por (f2), temos também que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F(s)}{s^2} = 1,$$

ou seja, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $R > 1$  tal que se  $|s| > R$ , então

$$\left| \frac{F(s)}{s^2} - 1 \right| < \varepsilon,$$

ou ainda, existe uma constante  $C(p) > 0$  para  $2 \leq p \leq 2^*$  tal que

$$|F(s) - s^2| < \varepsilon |s|^2 \Rightarrow |F(s)| \leq C(p)|s|^p.$$

Se  $\delta \leq s \leq R$ , então  $|F(s)| \leq M$ , pois  $F$  é contínua.

Assim, juntando todas estas estimativas temos que, dados  $\varepsilon > 0$  e  $2 \leq p \leq 2^*$ , existe



uma constante  $C(p) > 0$  tal que

$$|F(s)| < \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + C(p)|s|^p, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

## 4.1 Variedade de Pohozaev

D. Costa e H. Tehrani em [19] (Proposição 2.2) observaram que, se numa equação como (4.1) tivermos somente que  $\frac{f(s)}{s}$  é não-decrescente, e não estritamente crescente, não temos garantia de que todo caminho  $I(tu)$  intercepta uma única vez a variedade de Nehari  $\mathcal{N} := \{u \neq 0; I'(u)u = 0\}$ . Podemos ter caminhos que não interceptam a variedade e caminhos que a interceptam infinitas vezes. Como não temos tal condição sobre o comportamento da função  $f$ , este foi um dos motivos que nos levaram a trabalhar com a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$ .

Nesta seção, apresentaremos tal variedade, associada à equação (4.1), além de diversas propriedades da mesma. Começaremos então com sua construção, numa adaptação de resultado semelhante encontrado em [24], onde  $\Omega$  representa um subconjunto aberto limitado de  $\mathbb{R}^N$ , com fronteira  $\partial\Omega$  suave.

**Proposição 4.1.** *Se  $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$  é solução da equação  $-\Delta u = g(x, u)$ , onde  $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, então  $u$  satisfaz:*

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta \, dS_x = 2N \int_{\Omega} G(x, u) \, dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) \, dx - (N-2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

onde  $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$  e  $\eta$  denota o vetor normal unitário exterior de  $\partial\Omega$ . Ainda, se  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , então

$$2N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) \, dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x, u) \, dx = (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \quad (4.7)$$

onde agora assumimos que  $G$  e  $|\nabla G|$  pertencem à  $L^1(\mathbb{R}^N)$ .

*Demonstração.* Seguiremos aqui as ideias de [51]. Multiplicando  $-\Delta u = g(x, u)$  por  $x \cdot \nabla u$  e, analisando cada lado da equação, temos:

$$\Delta u x \cdot \nabla u = \operatorname{div} \left( \nabla u x \cdot \nabla u - x \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) + \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2,$$

e utilizando o Teorema do Divergente, obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta u x \cdot \nabla u \, dx = -\int_{\partial\Omega} \left( \nabla u x \cdot \nabla u - x \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \eta \, dS_x - \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (4.8)$$

Por outro lado, temos

$$g(x, u) x \cdot \nabla u = \operatorname{div}(xG(x, u)) - NG(x, u) - \sum_{i=1}^N x_i G_{x_i}(x, u),$$

e novamente utilizando o Teorema do Divergente, obtemos

$$\int_{\Omega} g(x, u) x \cdot \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} xG(x, u) \cdot \eta \, dS_x - N \int_{\Omega} G(x, u) \, dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) \, dx. \quad (4.9)$$

Fazendo (4.8) = (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} & -\int_{\partial\Omega} \left( \nabla u x \cdot \nabla u - x \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) \cdot \eta \, dS_x - \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \\ & \int_{\partial\Omega} xG(x, u) \cdot \eta \, dS_x - N \int_{\Omega} G(x, u) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) \, dx. \end{aligned}$$

Como  $u \equiv 0$  em  $\partial\Omega$ , temos que  $G(x, u) = 0$  em  $\partial\Omega$  e  $\nabla u = \nabla u \cdot \eta \eta$  implica

$$\frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \cdot \eta = - \left( \nabla u x \cdot \nabla u - \frac{x}{2} |\nabla u|^2 \right) \cdot \eta.$$

Assim, na expressão acima, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 x \cdot \eta \, dS_x = 2N \int_{\Omega} G(x, u) \, dx + 2 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} x_i G_{x_i}(x, u) \, dx - (N-2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Agora, consideremos  $\Omega = B_R(0)$ . Como  $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &= \int_0^\infty \int_{\partial B_R(0)} |\nabla u(r, \theta)|^2 dS_r r^{N-1} dr \\ &= \int_0^\infty r^{N-2} \int_{\partial B_R(0)} |\nabla u(r, \theta)|^2 r dS_r dr \\ &= \int_0^\infty r^{N-2} \int_{\partial B_R(0)} |\nabla u(r, \theta)|^2 x \cdot \eta \, dS_r dr < \infty. \end{aligned}$$

Mostraremos que existe uma sequência  $(r_n)$  tal que  $r_n \rightarrow \infty$  e

$$r_n \int_{\partial B_{r_n}(0)} |\nabla u(r, \theta)|^2 dS_r \rightarrow 0.$$

Suponhamos que não exista tal sequência  $(r_n)$ . Então,

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} r \int_{\partial B_r(0)} |\nabla u(r, \theta)|^2 dS_r > \alpha > 0.$$

Mas,  $r \int_{\partial B_r(0)} |\nabla u(r, \theta)|^2 dS_r = f(r) > 0$  e assim

$$\int_0^\infty r^{N-2} f(r) dr > \int_{R_0}^\infty r^{N-2} f(r) dr > \alpha \int_{R_0}^\infty r^{N-2} dr = +\infty,$$

o que é uma contradição com o fato de  $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ . Assim, tal sequência  $(r_n)$  existe.

Ainda, como  $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ ,  $\int_\Omega G(x, u) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx$  e  $\sum_{i=1}^N \int_\Omega x_i G_{x_i}(x, u) dx \rightarrow \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i G_{x_i}(x, u) dx$ , obtemos (4.7).

□

Para nossa equação (4.1), temos que (4.7) pode ser escrita como

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \quad (4.10)$$

onde  $G(x, u) = a(x)F(u) - \frac{\lambda u^2}{2}$ . Assim, temos que a variedade de Pohozaev associada à equação (4.1) é dada por

$$\mathcal{P} := \{u \in E_\lambda \setminus \{0\}; u \text{ satisfaz (4.10)}\}.$$

**Lema 4.2.** *Seja o funcional  $J : E_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definido por*

$$J(u) = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx.$$

*Temos que*

- a) *Existe  $\sigma > 0$  tal que  $\|u\|_\lambda > \sigma$ , para toda  $u \in \mathcal{P}$ .*
- b)  *$\mathcal{P} := \{u \in E_\lambda \setminus \{0\}; J(u) = 0\}$  é um conjunto fechado.*
- c)  *$\mathcal{P}$  é uma variedade de classe  $C^1$ .*

*Demonstração.* (a) Tomemos  $u \in \mathcal{P}$ . Então  $u$  satisfaz  $J(u) = 0$ , o que equivale, por (A4) a

$$\begin{aligned} (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \lambda N \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx &= 2N \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx \\ &< 2N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx. \end{aligned}$$

Utilizando (4.6), dado  $\varepsilon > 0$  e  $2 < p < 2^*$  temos

$$(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \lambda N \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx < Na_\infty \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + 2Na_\infty C(p) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx,$$

ou seja,

$$(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + (\lambda N - \varepsilon a_\infty N) \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx < 2Na_\infty C(p) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Tomamos  $\varepsilon > 0$  tal que  $(N-2)\lambda < N(\lambda - \varepsilon a_\infty)$ . Assim,

$$\begin{aligned} (N-2) \|u\|_\lambda^2 &< 2Na_\infty \frac{C(p)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda |u|^p \\ &\leq 2Na_\infty \frac{C(p)}{\lambda} \hat{C} \|u\|_\lambda^p. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\frac{(N-2)\lambda}{2Na_\infty C(p) \hat{C}} < \|u\|_\lambda^{p-2},$$

onde as constantes envolvidas não dependem de  $u$ . Portanto, existe  $\sigma =$

$$\left( \frac{(N-2)\lambda}{2Na_\infty C(p) \hat{C}} \right)^{\frac{1}{p-2}} > 0 \text{ tal que se } u \in \mathcal{P}, \text{ então } \|u\|_\lambda > \sigma.$$

(b)  $J(u)$  é, por construção, um funcional de classe  $C^1$ . Assim,  $J^{-1}(\{0\})$  é um conjunto fechado, por ser a imagem inversa de um conjunto fechado por um funcional contínuo. Como  $\{u \equiv 0\}$  é um ponto isolado de  $J^{-1}(\{0\})$  então a afirmação (b) segue.

(c) Consideremos a derivada do funcional  $J$ , aplicada em  $u$ :

$$J'(u)u = (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u) u - \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x f(u) u dx. \quad (4.11)$$

Como temos  $u \in \mathcal{P}$ ,  $u$  satisfaz  $J(u) = 0$ , ou seja,

$$(N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = 2N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx, \quad (4.12)$$

e substituindo (4.12) em (4.11) obtemos

$$\begin{aligned} J'(u)u &= 2N \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &\quad - N \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u - \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x f(u)u dx \\ &= 2N \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx \\ &\quad - N \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u)u dx \\ &= 2N \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) \left( F(u) - \frac{1}{2}f(u)u \right) dx < 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos (A1), (A3) e (4.3). Assim, para toda  $u \in \mathcal{P}$ , temos que  $J'(u)u < 0$ . Portanto,  $\mathcal{P}$  é uma variedade  $C^1$ . □

**Lema 4.3.** *A variedade  $\mathcal{P}$  é uma restrição natural do problema (4.1).*

*Demonstração.* A argumentação de nossa prova se baseia nas ideias encontradas em [41], onde este lema foi provado para o caso autônomo. Seja  $u$  um ponto crítico do funcional  $I$ , restrito à variedade  $\mathcal{P}$ . Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange, temos que

$$I'(u) + \mu J'(u) = 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos que  $\mu = 0$ . Aplicando  $u \in \mathcal{P}$  na equação acima, obtemos:

$$I'(u)u + \mu J'(u)u = 0,$$

o que equivale à

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u)u dx \\ &\quad + \mu \left( (N-2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u)u - \lambda u^2 dx \right). \end{aligned}$$

Tal expressão está associada à seguinte equação

$$-\Delta u + \lambda u - a(x)f(u) + \mu \left( -(N-2)\Delta u + \lambda N u - N \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) f(u) \right) = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$-(1 + \mu(N-2))\Delta u + \lambda(1 + \mu N)u = [(1 + \mu N)a(x) + \mu \nabla a(x) \cdot x] f(u). \quad (4.13)$$

Tal equação tem uma variedade de Pohozaev à ela associada, dada por  $\hat{P}^{-1}(\{0\})$ , em que

$$\hat{P}(u) = \frac{(1 + \mu(N-2))(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G^*(x, u) dx - \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} G_{x_i}^*(x, u) x_i dx,$$

onde

$$G^*(x, u) = ((1 + \mu N)a(x) + \mu \nabla a(x) \cdot x) F(u) - \lambda \frac{(1 + \mu N)}{2} u^2,$$

e

$$\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} G_{x_i}^*(x, u) x_i dx = \int_{\mathbb{R}^N} ((1 + \mu N) \nabla a(x) \cdot x + \mu x \cdot H(x) \cdot x) F(u) dx,$$

onde  $H(x)$  denota a matriz Hessiana da função  $a(x)$ .

Assim,  $\hat{P}$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \hat{P}(u) &= \frac{(1 + \mu(N-2))(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &- N \int_{\mathbb{R}^N} ((1 + \mu N)a(x) + \mu \nabla a(x) \cdot x) F(u) - \lambda \frac{(1 + \mu N)}{2} u^2 dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} ((1 + \mu N) \nabla a(x) \cdot x + \mu x \cdot H(x) \cdot x) F(u) dx \\ &= \frac{(1 + \mu(N-2))(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &- N(1 + \mu N) \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\ &- N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left( \nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx. \end{aligned}$$

Mas lembrando, como  $u \in \mathcal{P}$ , então  $J(u) = 0$  e substituindo (4.12) na equação acima

segue que

$$\begin{aligned}\hat{P}(u) &= \frac{(1 + \mu(N - 2))(N - 2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - (1 + \mu N) \frac{(N - 2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left( \nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx\end{aligned}$$

ou seja,

$$\hat{P}(u) = -\mu(N - 2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left( \nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx.$$

Ainda,  $u$  é solução da equação (4.13) e portanto satisfaz  $\hat{P}(u) = 0$ . Assim, obtemos

$$-\mu(N - 2) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\mu \int_{\mathbb{R}^N} \left( \nabla a(x) \cdot x + \frac{x \cdot H(x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx.$$

Da Observação 4.3 e da hipótese (A5), temos que o lado direito da equação é sempre positivo, enquanto o lado esquerdo é sempre negativo, caso  $\mu > 0$  (ou vice-versa caso  $\mu < 0$ ). Então, devemos ter que  $\mu = 0$ . Assim a equação inicial

$$I'(u) + \mu J'(u) = 0,$$

com  $\mu = 0$ , implica em  $I'(u) = 0$  e portanto  $u$  é um ponto crítico de  $I$  e a restrição  $\mathcal{P}$  é natural.

□

## 4.2 O resultado de não existência

Começaremos esta seção com algumas relações entre a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$ , associada à equação (4.1), e a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}_\infty$ , associada ao problema autônomo, isto é, à equação

$$-\Delta u + \lambda u = a_\infty f(u). \quad (4.14)$$

Temos que o funcional associado à equação (4.14) é dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx,$$

e a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}_\infty$  é dada por

$$\mathcal{P}_\infty = \{u \in E_\lambda \setminus \{0\} ; J_\infty(u) = 0\},$$

onde

$$J_\infty(u) = \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx,$$

com  $G_\infty(u) = a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2}$ .

Ainda, consideremos o conjunto de caminhos

$$\Gamma_\infty = \{\gamma \in C([0, 1], E_\lambda) | \gamma(0) = 0, I_\infty(\gamma(1)) < 0\},$$

e definamos o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha para o funcional  $I_\infty$  por

$$c_\infty := \min_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)).$$

Mostraremos ao final desta seção que

$$p := \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) = c_\infty,$$

e tal nível não é atingido, isto é, tal nível não é um nível crítico para o funcional  $I$ . Isto nos motivará a procurar soluções em níveis mais altos de energia. Mais precisamente, na próxima seção mostraremos a existência de uma solução cuja energia se situa no intervalo  $(c_\infty, 2c_\infty)$ . Nossa argumentação aqui feita foi inspirada, com as devidas adaptações, na argumentação para a equação  $-\Delta u + V(x)u = g(u)$ , em  $\mathbb{R}^N$ , estudada por A. Azzollini e A. Pomponio, encontrada em [6].

**Lema 4.4.** *Suponha que  $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$ . Então existem únicos  $\theta_1(u) > 0$  e  $\theta_2(u) > 0$  tais que  $u(x/\theta_1) \in \mathcal{P}$  e  $u(x/\theta_2) \in \mathcal{P}_\infty$ .*

*Demonstração.* O caso de  $\mathcal{P}_\infty$  já é conhecido (vide, por exemplo, o Lema 1.17). Vamos verificar o caso de  $\mathcal{P}$ . Definimos a função

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &:= I(u(x/\theta)) = \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u(x/\theta)) dx \\ &= \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(u(x/\theta)) - \lambda \frac{u^2(x/\theta)}{2} dx \\ &= \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x) F(u(x)) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx. \end{aligned}$$



Derivando  $\psi(\theta)$ , e lembrando que trabalhamos com  $N \geq 3$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\psi'(\theta) &= \frac{N-2}{2}\theta^{N-3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x)F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\ &\quad - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x) \cdot x F(u) dx,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\psi'(\theta) &= \theta^{N-3} \left\{ \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x)F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \right. \\ &\quad \left. - \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)F(u) dx \right\}.\end{aligned}$$

Assim, temos que  $u(x/\theta) \in \mathcal{P}$  se, e somente se,  $\psi'(\theta) = 0$ , para algum  $\theta > 0$ . Observamos que, pela condição (A2) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x)F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx,$$

e por (4.2) e novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)F(u) dx = 0.$$

Assim, para  $\theta > 0$  suficientemente grande, temos

$$\psi'(\theta) = \theta^{N-3} \left\{ \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N\theta^2 \left( \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx + o_\theta(1) \right) \right\}.$$

Como  $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$ , segue que  $\psi'(\theta) < 0$ , para  $\theta > 0$  suficientemente grande.

Para  $\theta > 0$  suficientemente pequeno temos, da condição (A4), juntamente com as condições (A1) e (A3), que

$$0 < a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} < a_\infty,$$

$$-\frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx < \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx < a_\infty(1 + C(2))\|u\|_2^2,$$

onde utilizamos a estimativa (4.6), com  $\varepsilon = 2$  e  $p = 2$ .

Assim, existem constantes positivas  $A, B$  independentes de  $\theta$  tais que

$$-A \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \leq B.$$

Então, fazendo  $\theta > 0$  suficientemente pequeno na expressão de  $\psi'(\theta)$ , temos  $\psi'(\theta) > 0$ . Portanto, existe (pelo menos um)  $\theta_1 > 0$  tal que  $\psi'(\theta_1) = 0$ , ou seja, existe  $\theta_1 > 0$  tal que  $u(x/\theta_1) \in \mathcal{P}$ .

Mostraremos agora a unicidade de  $\theta_1$ . Como  $\theta > 0$  da expressão de  $\psi'(\theta) = 0$  obtemos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[ a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right] F(u) - \frac{\lambda u^2}{2} dx \right\},$$

ou seja,

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \varphi(\theta),$$

onde

$$\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[ a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right] F(u) - \frac{\lambda u^2}{2} dx.$$

Derivando  $\varphi$  em respeito à  $\theta$ , e pelas propriedades das funções envolvidas obtemos

$$\varphi'(\theta) = \int_{\mathbb{R}^N} \left( \nabla a(\theta x) \cdot x + \frac{[x \cdot H(\theta x)] \cdot (\theta x)}{N} + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot x}{N} \right) F(u) dx,$$

que pode ser escrita como

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \nabla a(\theta x) \cdot (\theta x) + \frac{(\theta x) \cdot H(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right) F(u) dx.$$

Pelas condições (A3) e (A5), bem como as condições sobre a função  $F$ , temos que  $\varphi'(\theta) > 0$ .

Assim, como  $\varphi(\theta)$  é uma função crescente, só existe um único  $\theta > 0$  tal que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta^2 \varphi(\theta).$$

Com isso, temos verificada a unicidade de  $\theta_1$ . □

**Lema 4.5.** *Considere o conjunto aberto  $\mathcal{O} = \left\{ u \in E_\lambda \setminus \{0\}; \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0 \right\}$ . A função  $\theta_1 : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por  $u \mapsto \theta_1(u)$  tal que  $u(x/\theta_1(u)) \in \mathcal{P}$  é contínua.*

*Demonstração.* Consideremos  $(u_n) \subset \mathcal{O}$  tal que  $u_n \rightarrow u \in \mathcal{O}$ . Mostraremos que

$$\theta_1(u_n) \rightarrow \theta_1(u).$$

**Afirmção 4.**  $\theta_1(u_n)$  é limitada.

De fato, consideremos a expressão  $\psi'(\theta) = 0$  do lema anterior, aplicada em  $u_n$  e em  $\theta_1(u_n)$  :

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx &= N\theta_1^2(u_n) \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta_1(u_n)x)F(u) - \frac{\lambda u_n^2}{2} dx \\ &+ N\theta_1^2(u_n) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x) \cdot (\theta_1(u_n)x)}{N} F(u_n) dx. \end{aligned}$$

Como  $\theta_1(u_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , suponhamos que  $\theta_1(u_n) \rightarrow +\infty$ . Então, pelas condições sobre as funções  $a$  e  $F$ , e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que o lado direito da expressão acima converge ao infinito, enquanto o lado esquerdo converge à  $\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \infty$ . Portanto, temos que  $\theta_1(u_n)$  é uma sequência limitada e assim, possui uma subseqüência convergente, digamos  $\theta_1(u_n) \rightarrow \bar{\theta}_1$ .

Novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(\theta_1(u_n)x)F(u_n)dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} a(\bar{\theta}_1x)F(u)dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\theta_1(u_n)x) \cdot (\theta_1(u_n)x)}{N} F(u_n)dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\bar{\theta}_1x) \cdot (\bar{\theta}_1x)}{N} F(u)dx,$$

e além disso,  $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$  e  $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx$ , pois  $u_n \rightarrow u$  em  $E_\lambda$ . Assim, obtemos que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\bar{\theta}_1^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(\bar{\theta}_1x) + \frac{\nabla a(\bar{\theta}_1x) \cdot (\bar{\theta}_1x)}{N} \right) F(u) - \frac{\lambda u^2}{2} dx.$$

Mas, se tal igualdade é verdadeira, temos que  $\bar{\theta}_1$  é tal que  $u(x/\bar{\theta}_1) \in \mathcal{P}$ . Pela unicidade da projeção em  $\mathcal{P}$ , temos que  $\bar{\theta}_1 = \theta_1(u)$ . Portanto,  $\theta_1(u_n) \rightarrow \theta_1(u)$  em  $\mathbb{R}^+$ .  $\square$

**Lema 4.6.** Se  $u \in \mathcal{P}_\infty$ , então existe  $\theta > 0$  tal que  $u(x/\theta) \in \mathcal{P}$ , com  $\theta > 1$ .

*Demonstração.* Como  $u \in \mathcal{P}_\infty$ , temos que  $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u)dx > 0$  e a existência de tal  $\theta$  é garantida pelo lema anterior. Vamos mostrar que  $\theta > 1$ . Aplicando  $u(x/\theta)$  no funcional

$J$ , temos:

$$\begin{aligned} 0 = J(u(x/\theta)) &= \frac{N-2}{2} \theta^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x) F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx \\ &- \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta x) \cdot (\theta x) F(u) dx \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= \theta^{N-2} \left\{ \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \theta^2 \left[ \int_{\mathbb{R}^N} a(\theta x) F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} F(u) dx \right] \right\} \end{aligned}$$

e como temos  $\theta > 0$ , obtemos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ a(\theta x) + \frac{\nabla a(\theta x) \cdot (\theta x)}{N} \right\} F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx,$$

e pela condição (A4), temos

$$\begin{aligned} \frac{(N-2)}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &< N \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\ &= N \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx \end{aligned}$$

Assim, temos

$$(2^*)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx.$$

Mas, como  $u \in \mathcal{P}_\infty$ , temos que  $(2^*)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx$ , portanto, para a desigualdade acima ser verdadeira, devemos ter  $\theta^2 > 1$ , ou seja,  $\theta > 1$ . □

**Lema 4.7.** *Se  $u \in \mathcal{P}$ , então existe  $\theta > 0$  tal que  $u(x/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$ , com  $\theta < 1$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, devemos verificar que se  $u \in \mathcal{P}$ , então  $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$ . De fato, se  $u \in \mathcal{P}$ , então  $u$  satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &= N \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\
&< N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\
&= N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx,
\end{aligned}$$

onde utilizamos novamente a condição (A4). Como  $u \not\equiv 0$  e  $u \in E_\lambda$ , temos que  $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx > 0$ , portanto  $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$  e a existência de  $\theta > 0$  tal que  $u(x/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$  está garantida pelo Lema 4.4. Para verificar que  $\theta < 1$ , observamos que, conforme acima temos

$$\frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx.$$

Mas, se  $u(x/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$ , então  $\theta$  satisfaz

$$\theta^2 = \frac{(2^*)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx} < \frac{\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx}{\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx} = 1.$$

Portanto,  $\theta^2 < 1$ , o que implica que  $\theta < 1$ .

□

**Observação 4.4.** *Pelo que vimos até agora temos que, dada  $u \in E_\lambda, u \not\equiv 0$ , ela pode ser projetada em  $\mathcal{P}$  e em  $\mathcal{P}_\infty$  se, e somente se,  $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$ .*

**Lema 4.8.** *Se  $u \in \mathcal{P}_\infty$ , pela invariância por translações da integral, tem-se que  $u(x-y) \in \mathcal{P}_\infty$ , para todo  $y \in \mathbb{R}^N$ . Pelo Lema 4.6, tem-se que existe  $\theta_y(u) > 1$  tal que  $u\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right) \in \mathcal{P}$  e, além disso, tem-se que*

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \theta_y(u) = 1.$$

*Demonstração.* Suponhamos, por contradição, que exista uma subsequência  $y_n \in \mathbb{R}^N$  tal que  $|y_n| \rightarrow +\infty$  e  $\theta_{y_n} \rightarrow A > 1$  ou  $+\infty$ , pelo Lema 4.6. Definindo

$$H(\theta_{y_n} x + y_n) := \left( a(\theta_{y_n} x + y_n) + \frac{\nabla a(\theta_{y_n} x + y_n) \cdot (\theta_{y_n} x + y_n)}{N} \right),$$

temos que

$$H(\theta_{y_n} x + y_n) F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2}$$

converge pontualmente à  $G_\infty(u(x))$ . Além disso temos, por (4.6) com  $p = 2$  e  $\varepsilon = 2$  que

$$\begin{aligned} H(\theta_{y_n}x + y_n)F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} &< a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} \\ &\leq a_\infty(1 + C(2))u^2(x) \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{y_n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} H(\theta_{y_n}x + y_n)F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u(x)) dx. \quad (4.15)$$

Mas, para cada  $y_n$ , temos que  $u\left(\frac{x - y_n}{\theta_{y_n}}\right) \in \mathcal{P}$  com  $\theta_{y_n} > 1$ , ou seja, temos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta_{y_n}^2 \int_{\mathbb{R}^N} H(\theta_{y_n}x + y_n)F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx. \quad (4.16)$$

Pelo limite acima, teremos o lado direito de (4.16) convergindo à  $NA^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx$  e o lado esquerdo fixo em  $\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ . Como  $u \in \mathcal{P}_\infty$  e  $A > 1$  ou  $+\infty$ , segue o absurdo.

□

**Lema 4.9.**  $\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \theta_y = \bar{\theta} < \infty$ , com  $\bar{\theta} > 1$ .

*Demonstração.* Como  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \theta_y = 1$ , para  $|y| > R$ , com  $R > 0$  suficientemente grande, temos  $\theta_y$  tão próximo de 1 quanto necessário. Mostraremos então que  $\sup_{0 \leq |y| \leq R} \theta_y \leq M$ .

Suponhamos que o supremo não exista. Então, existe uma sequência  $y_n \in \mathbb{R}^N$ , com  $|y_n| \in [0, R]$  tal que  $\theta_{y_n} \rightarrow \infty$ . Mas, com um argumento análogo ao do lema anterior, agora com o limite em  $\theta_{y_n} \rightarrow \infty$ , podemos mostrar que

$$\lim_{\theta_{y_n} \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} H(\theta_{y_n}x + y_n)F(u) - \lambda \frac{u^2(x)}{2} dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u(x)) dx.$$

Assim, em (4.16), teremos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N\theta_{y_n}^2 \left( \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx + o_{y_n}(1) \right).$$

Como  $\theta_{y_n} \rightarrow \infty$  e o lado esquerdo está fixo, temos o absurdo. Assim, o supremo existe.

□

**Lema 4.10.** Existe  $\hat{\sigma} > 0$  tal que  $\inf_{u \in \mathcal{P}} \|\nabla u\|_2 \geq \hat{\sigma}$ .

*Demonstração.* Se  $u \in \mathcal{P}$ ,  $u$  satisfaz

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx,$$

e pela condição (A4), temos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx < N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx.$$

Mas, por (4.6), com  $p = 2^*$ , e  $\varepsilon = \frac{\lambda}{a_\infty} > 0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &< N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda}{2} |u|^2 + a_\infty C(2^*) |u|^{2^*} - \frac{\lambda}{2} u^2 dx \\ \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx &< a_\infty C(2^*) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \\ \frac{1}{2^*} \|\nabla u\|_2^2 &< a_\infty C(2^*) \|u\|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (vide [11], Teorema 9.9), temos que existe  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_{2^*} \leq C \|\nabla u\|_2,$$

assim,

$$\frac{1}{2^*} \|\nabla u\|_2^2 < a_\infty C(2^*) C^{2^*} \|\nabla u\|_2^{2^*},$$

ou seja,

$$0 < \frac{1}{2^* a_\infty C(2^*) C^{2^*}} < \|\nabla u\|_2^{2^*-2}.$$

Portanto,  $\inf_{u \in \mathcal{P}} \|\nabla u\|_2 \geq \hat{\sigma}$ , em que  $\hat{\sigma} > \left( \frac{1}{2^* a_\infty C(2^*) C^{2^*}} \right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ .

□

**Lema 4.11.** Temos que  $p =: \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) > 0$ .

*Demonstração.* Se  $u \in \mathcal{P}$ , então  $I(u)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right) \\ &\geq \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{N} \hat{\sigma}^2 > 0 \end{aligned}$$

onde usamos o Lema 4.10 e a condição (A3). Portanto,  $p > 0$ .  $\square$

**Observação 4.5.** *Analogamente ao que fizemos no Capítulo 1, podemos mostrar que*

$$\inf_{u \in \mathcal{P}_\infty} I_\infty(u) = c_\infty,$$

onde  $c_\infty$  é o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha para o funcional  $I_\infty$ , e tal nível é o nível de energia mínima para o funcional  $I_\infty$ .

**Lema 4.12.** *Temos que  $p \leq c_\infty$ .*

*Demonstração.* Seja  $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$  uma solução 'ground state' do problema no infinito, então  $w \in \mathcal{P}_\infty$  e  $I_\infty(w) = c_\infty$ . Para qualquer  $y \in \mathbb{R}^N$ , definimos  $w_y := w(x - y)$ . Pela invariância por translações de integrais, temos que  $w_y \in \mathcal{P}_\infty$  e  $I_\infty(w_y) = c_\infty$ . Pelo Lema 4.6, para qualquer  $y \in \mathbb{R}^N$ , existe um  $\theta_y > 1$  tal que  $\tilde{w}_y = w_y(\cdot/\theta_y) \in \mathcal{P}$ . Temos que

$$\begin{aligned} |I(\tilde{w}_y) - c_\infty| &= |I(\tilde{w}_y) - I_\infty(w_y)| \\ &= \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{w}_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, \tilde{w}_y) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w_y) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \theta_y^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, \tilde{w}_y) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(w_y) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} (\theta_y^{N-2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_y|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F(\tilde{w}_y) - \frac{\lambda \tilde{w}_y^2}{2} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w_y) - \frac{\lambda w_y^2}{2} dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} (\theta_y^{N-2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx - \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} a(x\theta_y + y) F(w) - \frac{\lambda w^2}{2} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w) - \frac{\lambda w^2}{2} dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} (\theta_y^{N-2} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + (\theta_y^N - 1) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda w^2}{2} dx \right. \\ &\quad \left. - \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} a(x\theta_y + y) F(w) dx + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(w) dx \right| \\ &\leq \frac{|\theta_y^{N-2} - 1|}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx + |\theta_y^N - 1| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\lambda w^2}{2} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |F(w)| |a_\infty - \theta_y^N a(x\theta_y + y)| dx. \end{aligned}$$



Como temos que  $\theta_y \rightarrow 1$  quando  $|y| \rightarrow \infty$ , obtemos que

$$|I(\tilde{w}_y) - c_\infty| \leq o_y(1) + o_y(1) + \int_{\mathbb{R}^N} |F(w)| |a_\infty - a(x+y)| dx,$$

e como  $a(x+y) \rightarrow a_\infty$  quando  $|y| \rightarrow \infty$ , segue que

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} I(\tilde{w}_y) = c_\infty.$$

Portanto,  $p = \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) \leq c_\infty$ .

□

**Observação 4.6.** *Sejam  $u \in E_\lambda$ , com  $\int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx > 0$  e  $\theta > 0$  tal que  $u(x/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$ . Então, temos que*

$$\begin{aligned} I_\infty(u(x/\theta)) &= \frac{\theta^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^N \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx \\ &= \theta^{N-2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \theta^2 \int_{\mathbb{R}^N} G_\infty(u) dx \right\} \\ &= \theta^{N-2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right\} \\ &= \frac{\theta^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\infty(u(x/\theta)) = \frac{\theta^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \quad (4.17)$$

**Lema 4.13.**  $p = c_\infty$

*Demonstração.* Tomemos  $u \in \mathcal{P}$  e  $0 < \theta < 1$  tal que  $u(x/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$ . Como  $u \in \mathcal{P}$ , então  $u$  satisfaz

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &> \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq \frac{\theta^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, (\theta < 1) \\ &= I_\infty(u(x/\theta)) \geq c_\infty \end{aligned}$$

onde usamos (4.17) e (A3). Assim, para todo  $u \in \mathcal{P}$ ,  $I(u) > c_\infty$  e portanto  $\inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) \geq c_\infty$ . Do lema anterior, concluimos que  $p = c_\infty$ .

□

Estamos então prontos para mostrarmos o resultado principal desta seção:

**Teorema 4.14.** *Assuma que (A1 – A5) e (f1 – f3) são válidas. Então,  $p = \inf_{u \in \mathcal{P}} I(u)$  não é um nível crítico para o funcional  $I$ . Em particular, o ínfimo não é atingido.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que exista  $z \in E_\lambda$ , ponto crítico do funcional  $I$  no nível  $p$ . Em particular,  $z \in \mathcal{P}$  e  $I(z) = p$ . Seja  $\theta \in (0, 1)$  tal que  $z(x/\theta) \in \mathcal{P}_\infty$ . Então

$$\begin{aligned} p = I(z) &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(z) dx \\ &> \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 dx \\ &> \frac{\theta^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^2 dx \\ &= I_\infty(z(x/\theta)) \geq c_\infty \end{aligned}$$

onde utilizamos (A3) e (4.17). Assim,  $p > c_\infty$ , o que contradiz o lema anterior. □

### 4.3 Resultado de existência

Nesta seção iremos mostrar a existência de uma solução positiva para a equação (4.1). Como vimos na seção anterior, devemos procurar por funções que possuam nível de energia maior que  $c_\infty$ . Utilizaremos aqui ideias semelhantes às descritas no artigo de A. Ambrosetti, G. Cerami e D. Ruiz [3], onde um argumento de "linking" é utilizado, juntamente com uma restrição sobre a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$ , feita a partir da construção da chamada função *baricentro*. Argumentos semelhantes com tal função baricentro, feitos sobre um outro tipo de variedade, podem ser encontrados nos trabalhos de G. S. Spradlin ([44], [45]).

Começaremos mostrando que os níveis de energia do Teorema do Passo da Montanha para os funcionais  $I$  e  $I_\infty$  coincidem. Temos que o funcional  $I$  satisfaz as condições do Teorema do Passo da Montanha, pela estimativa (4.6), para a condição  $(\mathcal{I}_1)$  e, para a condição  $(\mathcal{I}_2)$ , temos que (A1) implica que  $I(z) < I_\sigma(z)$ , onde  $I_\sigma$  é o funcional associado ao problema autônomo  $-\Delta u + \lambda u = \sigma f(u)$ , em que  $\sigma := \inf a(x) > 0$  e conforme feito no Capítulo 1, podemos encontrar  $e \in E_\lambda$  tal que  $I_\sigma(e) < 0$ , e consequentemente,  $I(e) < 0$ .

**Lema 4.15.** *Seja  $c$  o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha para o funcional  $I$ . Então  $c_\infty = c$ .*

*Demonstração.* Sejam

$$\Gamma_\infty = \{\gamma \in C([0, 1], E_\lambda); \gamma(0) = 0, I_\infty(\gamma(1)) < 0\},$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], E_\lambda); \gamma(0) = 0, I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Tomemos  $\gamma \in \Gamma$ , então  $I(\gamma(1)) < 0$ . Mas como  $I_\infty \leq I$ , temos que  $I_\infty(\gamma(1)) < 0$ . Portanto,  $\gamma \in \Gamma_\infty$ . Assim,  $\Gamma \subset \Gamma_\infty$ . Então, segue de  $I_\infty \leq I$  que se  $\gamma \in \Gamma$ , então

$$\max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

ainda,

$$\min_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \leq \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)),$$

e como  $\Gamma \subset \Gamma_\infty$ , temos

$$c_\infty = \min_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \leq \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I_\infty(\gamma(t)) \leq \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) = c.$$

Portanto,  $c_\infty \leq c$ . Para mostrar que  $c \leq c_\infty$ , dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos  $\gamma \in \Gamma_\infty$  tal que  $I_\infty(\gamma(t)) < c_\infty + \varepsilon$ . Tomemos  $y \in \mathbb{R}^N$  e façamos a translação  $\tau_y(\gamma(t))$ . Fazendo  $y$  suficientemente grande, temos que  $\tau_y(\gamma(t)) \in \Gamma$ . Se  $t_0$  é tal que  $I(\tau_y(\gamma(t_0)))$  é o valor máximo no caminho, temos

$$c_\infty + \varepsilon > I_\infty(\gamma(t_0)) = \lim_{|y| \rightarrow \infty} I_\infty(\tau_y(\gamma(t_0))) = \lim_{|y| \rightarrow \infty} I(\tau_y(\gamma(t_0))) \geq c.$$

Portanto,  $c_\infty \geq c$  e temos a igualdade.

□

**Lema 4.16.**  $p = c$ .

*Demonstração.* Já sabemos que, para o funcional  $I_\infty$ ,  $c_\infty = p_\infty$ , onde  $p_\infty$  é o ínfimo sobre  $\mathcal{P}_\infty$  (vide Lemas 1.15 e 1.16). Além disso, no Lema 4.13, mostramos que  $p = c_\infty$ . Assim temos que  $p = c_\infty = c$ . Além disso, temos também que  $p = p_\infty$ . □

Temos ainda a seguinte propriedade da variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$  em relação à estrutura de caminhos do Teorema do Passo da Montanha:

**Lema 4.17.** *Dado  $\gamma \in \Gamma$ , existe  $s \in (0, 1)$  tal que  $\gamma(s)$  intercepta  $\mathcal{P}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, verificaremos a seguinte afirmação:

**Afirmção 5.** *Existe  $\rho_0 > 0$  tal que se  $0 < \|u\|_\lambda < \rho_0$ , então  $J(u) > 0$ .*

De fato,

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} \left( a(x) + \frac{\nabla a(x) \cdot x}{N} \right) F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\
 &> \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) - \lambda \frac{u^2}{2} dx \\
 &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + N \int_{\mathbb{R}^N} \lambda \frac{u^2}{2} dx - N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx \\
 &\geq \frac{N-2}{2} \|u\|_\lambda^2 - N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u) dx
 \end{aligned}$$

onde utilizamos a condição (A4). Temos ainda que

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^p dx \leq \frac{1}{\lambda} \|u\|_\lambda^p.$$

Assim, utilizando também a estimativa (4.6), temos

$$\begin{aligned}
 J(u) &> \frac{N-2}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{N\varepsilon a_\infty}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^2 dx - a_\infty NC(p) \int_{\mathbb{R}^N} u^p(x) dx \\
 J(u) &> \frac{N-2}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{N\varepsilon a_\infty}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u^2 dx - a_\infty CNC(p) \|u\|_\lambda^p \\
 &\geq \frac{N-2}{2} \|u\|_\lambda^2 - \frac{N\varepsilon a_\infty}{2\lambda} \|u\|_\lambda^2 - a_\infty CNC(p) \|u\|_\lambda^p \\
 &= \frac{1}{2} \left( N - 2 - \frac{N\varepsilon a_\infty}{\lambda} \right) \|u\|_\lambda^2 - a_\infty CNC(p) \|u\|_\lambda^p \\
 &= \frac{1}{2\lambda} (\lambda N - 2\lambda - N\varepsilon a_\infty) \|u\|_\lambda^2 - a_\infty CNC(p) \|u\|_\lambda^p.
 \end{aligned}$$

Tomemos  $0 < \rho < 1$  tal que  $\rho^p < \frac{1}{4a_\infty CNC(p)} \left( \frac{\lambda N - 2\lambda - N\varepsilon a_\infty}{\lambda} \right) \rho^2$ . Então, se  $\|u\|_\lambda = \rho$ , temos

$$\begin{aligned}
 J(u) &> \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda N - 2\lambda - N\varepsilon a_\infty}{\lambda} \right) \rho^2 - \frac{1}{4a_\infty CNC(p)} \left( \frac{\lambda N - 2\lambda - N\varepsilon a_\infty}{\lambda} \right) a_\infty CNC(p) \rho^2 \\
 &= \frac{1}{4\lambda} (\lambda N - 2\lambda - N\varepsilon a_\infty) \rho^2 > 0.
 \end{aligned}$$

Notemos que para isto, basta tomarmos  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que  $\lambda(N - 2) - N\varepsilon a_\infty > 0$ . Assim,  $J(u) > 0$  se  $0 < \|u\|_\lambda < \rho$ .

Observamos ainda que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx \\ &= NI(u) - \|\nabla u\|_2^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F(u) dx. \end{aligned}$$

Por (A3) e da Observação 4.3 segue que

$$J(u) < NI(u).$$

Assim, tome  $\gamma \in \Gamma$ . Temos que  $\gamma(0) = 0$ , e assim,  $J(\gamma(0)) = 0$ . E como  $I(\gamma(1)) < 0$ , temos que

$$J(\gamma(1)) < NI(\gamma(1)) < 0.$$

Portanto, existe  $s \in (0, 1)$ , com  $\|\gamma(s)\|_\lambda > \rho$  tal que  $J(\gamma(s)) = 0$ . Portanto,  $\gamma(s) \in \mathcal{P}$ , ou seja, todo caminho  $\gamma \in \Gamma$  intercepta  $\mathcal{P}$ .

□

Vamos agora, nos próximos lemas, mostrar a existência e a limitação de sequências de Cerami para o funcional  $I$ . Definimos assim o *baricentro* de uma função  $u \neq 0 \in E_\lambda$ : seja

$$\mu(u)(x) = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy,$$

com  $\mu(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  e contínua. Em seguida, façamos

$$\hat{u}(x) = \left[ \mu(u)(x) - \frac{1}{2} \max \mu(u) \right]^+.$$

Agora temos  $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Definimos então o *baricentro* de  $u$  por:

$$\beta(u) = \frac{1}{|\hat{u}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} x \hat{u}(x) dx \in \mathbb{R}^N.$$

Visto que  $\hat{u}$  tem suporte compacto,  $\beta(u)$  está bem definida.

A função  $\beta$  satisfaz as seguintes propriedades, cujas demonstrações podem ser encontradas no Apêndice:

- (a)  $\beta$  é contínua em  $E_\lambda \setminus \{0\}$ .
- (b) Se  $u$  é radial,  $\beta(u) = 0$ .
- (c) Dado  $y \in \mathbb{R}^N$ , e definindo  $u_y(x) := u(x - y)$ , temos que  $\beta(u_y) = \beta(u) + y$ .

**Lema 4.18.** *Seja  $c$  o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha. Então existem sequências de Cerami  $(u_n) \subset E_\lambda$  tais que  $I(u_n) \rightarrow c$  e  $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Vamos utilizar o Teorema de Ghoussoub-Preiss [23] (Teorema 6, ou vide Teorema A.2, no Apêndice) com  $X = E_\lambda$  e  $\phi = I$ . Inicialmente, consideremos  $z_0 = 0$  e  $z_1$  pertencentes à  $E_\lambda$ , tal que  $I(z_1) < 0$ . A existência de tal  $z_1$  é garantida pela geometria do Passo da Montanha, e consideremos ainda  $\mathcal{P} = \{u \in E_\lambda \setminus \{0\}; J(u) = 0\}$ , variedade de Pohozaev.

**Afirmção 6.**  $\mathcal{P}$  separa  $z_0$  e  $z_1$ .

De fato, observamos que  $z_0 = 0 \notin \mathcal{P}$  e  $z_1 \notin \mathcal{P}$ , pois  $J(z_1) < NI(z_1) < 0$  (prova do Lema 4.17). Ainda da prova do Lema 4.17, segue que existe  $\rho > 0$  tal que se  $0 < \|u\|_\lambda < \rho$ , então  $J(u) > 0$ . Podemos pensar em  $E_\lambda \setminus \mathcal{P}$  como sendo  $\{u \in E_\lambda; J(u) > 0\} \cup \{u \in E_\lambda; J(u) < 0\}$ . Assim, existe uma bola aberta  $B_\alpha(0)$ , contendo  $z_0$ , e existe uma componente conexa  $C_1$  de  $\{u \in E_\lambda; J(u) > 0\}$  tal que  $B_\alpha(0) \subset C_1$ . E claramente,  $z_2$  pertence a uma das componentes conexas de  $\{u \in E_\lambda; J(u) < 0\}$ .

Consideremos agora o conjunto fechado  $\Omega := \{u \in E_\lambda; \beta(u) = 0\}$ . Temos que

$$\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \Omega$$

é fechado e  $\mathcal{F}$  novamente separa  $z_0$  e  $z_1$ , pois  $z_0, z_1 \notin \mathcal{F}$ ,  $z_0$  continua em uma componente conexa de  $\{J(u) > 0\}$  e  $z_1$  numa componente conexa de  $\{J(u) < 0\}$ , independentemente da condição de  $\Omega$ . Tomando agora o conjunto fechado  $I_c := \{u \in E_\lambda; I(u) \geq c\}$  e fazendo  $\mathcal{F} \cap I_c$ , temos que este conjunto fechado separa  $z_0$  e  $z_1$ , pois  $\mathcal{F}$  já os separava, e ainda,  $z_0, z_1 \notin I_c$ .

Então, pelo Teorema de Ghoussoub-Preiss temos garantida a existência de uma sequência  $(u_n) \subset E_\lambda$  tal que

$$\delta(u_n, \mathcal{F}) \rightarrow 0 \tag{4.18}$$

$$I(u_n) \rightarrow c \tag{4.19}$$

$$\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0 \tag{4.20}$$

□

**Lema 4.19.** *Toda sequência de Cerami  $(u_n)$ , com  $I(u_n) \rightarrow d$  e  $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$  possui uma subsequência limitada.*

A demonstração deste lema segue as mesmas ideias dos lemas semelhantes demonstrados nos Capítulos anteriores, por isso, para não cansar o leitor, a mesma está

apresentada no Apêndice.

**Lema 4.20.** (*Splitting*) Seja  $(u_n) \subset E_\lambda$  uma sequência limitada tal que  $I(u_n) \rightarrow d$  e  $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$ . Substituindo  $(u_n)$  por uma subsequência, caso necessário, temos que existe uma solução  $\bar{u}$  de (4.1), um número  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k$  funções  $u_1, u_2, \dots, u_k$  e  $k$  sequências de pontos  $(y_n^j) \in \mathbb{R}^N, 1 \leq j \leq k$ , satisfazendo:

- a)  $u_n \rightarrow \bar{u}$  em  $E_\lambda$  ou
- b)  $u_j$  são soluções não triviais de (4.14);
- c)  $|y_n^j| \rightarrow \infty$  e  $|y_n^j - y_n^i| \rightarrow \infty, i \neq j$ ;
- d)  $u_n - \sum_{i=1}^k u_i(x - y_n^i) \rightarrow \bar{u}$ ;
- e)  $I(u_n) \rightarrow I(\bar{u}) + \sum_{i=1}^k I_\infty(u_i)$ .

Novamente, a demonstração de tal fato segue as mesmas ideias da prova do Lema 3.6, e portanto também é apresentada em detalhes no Apêndice.

**Corolário 4.1.** Se  $I(u_n) \rightarrow c_\infty$ , então  $(u_n)$  é relativamente compacta ou o lema anterior vale com  $k = 1$  e  $\bar{u} = 0$ .

**Lema 4.21.** O funcional  $I$  satisfaz a condição de Cerami  $(Ce)_d$ , para qualquer  $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$ .

*Demonstração.* Tomemos uma sequência  $(u_n) \in E_\lambda$  tal que  $I(u_n) \rightarrow d$  e  $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$ . Pelo Lema 4.19, temos que  $(u_n)$  é limitada. Aplicando o Lema 4.20, a menos de subsequências, temos

$$u_n - \sum_{j=1}^k u^j(x - y_n^j) \rightarrow \bar{u},$$

em  $E_\lambda$ , onde  $u^j$  é solução fraca não nula do problema no infinito,  $|y_n^j| \rightarrow \infty$  e  $\bar{u}$  é solução fraca da equação (4.1). Ainda,

$$I(u_n) = I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k I_\infty(u_j) + o_n(1).$$

Como  $d < 2c_\infty$ , temos que  $k < 2$ . Se  $k = 1$ , temos dois casos:

- 1)  $\bar{u} \neq 0$ , o que implica em  $I(\bar{u}) \geq c_\infty$ , pois  $\bar{u} \in \mathcal{P}$  e  $\inf_{u \in \mathcal{P}} I(u) = c_\infty$ . Assim  $I(u_n) \geq 2c_\infty$ .

2)  $\bar{u} = 0$ , o que implica em  $I(u_n) \rightarrow I_\infty(u_1)$ .

Em ambos os casos, temos uma contradição com o fato de  $d \in (c_\infty, 2c_\infty)$ . Assim, devemos ter  $k = 0$  e  $u_n \rightarrow \bar{u}$ .

□

Definimos agora

$$b := \inf \{I(u); u \in \mathcal{P} \text{ e } \beta(u) = 0\}.$$

Claramente, temos que  $b \geq c_\infty$ . Temos o seguinte resultado:

**Lema 4.22.**  $b > c_\infty$ .

*Demonstração.* Suponhamos, por contradição, que  $b = c_\infty = c$ . Então, pelo Lema 4.18 existe uma sequência de Cerami  $(u_n) \subset E_\lambda$  satisfazendo (4.18), (4.19) e (4.20), onde

$$\mathcal{F} = \{u \in E_\lambda; u \in \mathcal{P}, \beta(u) = 0\}.$$

Temos então por (4.18) garantida a existência de uma sequência

$$(v_n) \subset \mathcal{F} \text{ tal que } \delta(u_n, v_n) \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 4.19, temos que  $(u_n)$  é limitada, isto é,  $\|u_n\|_\lambda \leq M$ . Vamos mostrar que  $(v_n)$  é também limitada. De fato, pelas propriedades da métrica geodésica  $\delta$  (encontradas no Apêndice), temos que

$$\delta(v_n, 0) \leq \delta(v_n, u_n) + \delta(u_n, 0) \leq 1 + \|u_n\|_\lambda \leq 1 + M,$$

ou seja,  $(v_n)$  é limitada na métrica  $\delta$ . Por outro lado, temos que

$$\ln(1 + \|v_n\|_\lambda) = \delta(0, v_n) = \delta(v_n, 0) \leq 1 + M,$$

o que implica que  $(v_n)$  é limitada na norma  $\|\cdot\|_\lambda$ , ou seja,  $\|v_n\|_\lambda \leq N$ . Tomemos  $R_0 := \max(M, N)$ . Então  $(u_n)$  e  $(v_n)$  pertencem à bola  $B_{R_0}(0)$  na norma  $\|\cdot\|_\lambda$ . Assim, existe  $\alpha > 0$  tal que  $\delta(u_n, v_n) \geq \alpha\|u_n - v_n\|_\lambda$ , o que implica que  $\|u_n - v_n\|_\lambda \rightarrow 0$ , ou seja,

$$u_n(x) = v_n(x) + o_n(1) \tag{4.21}$$

com  $v_n \in \mathcal{P}$  e  $\beta(v_n) = 0$ .



Mas, por outro lado, como  $(u_n)$  é uma sequência de Cerami no nível  $c = c_\infty$  e limitada, pelo Corolário 4.1, temos que

$$u_n(x) \rightarrow u^1(x - y_n) \quad (4.22)$$

onde  $u^1$  é uma solução do problema no infinito e  $|y_n| \rightarrow \infty$ .

De (4.21), dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > n_0$  então  $\|u_n - v_n\|_\lambda < \varepsilon/2$ . E de (4.22) existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > n_1$ , então  $\|u_n(x) - u^1(x - y_n)\|_\lambda < \varepsilon/2$ . Assim, se  $n_2 > \max\{n_0, n_1\}$ , temos que

$$\|v_n(x) - u^1(x - y_n)\|_\lambda \leq \|v_n(x) - u_n(x)\|_\lambda + \|u_n(x) - u^1(x - y_n)\|_\lambda < \varepsilon.$$

Assim,  $v_n(x) \rightarrow u^1(x - y_n)$ . Fazendo uma translação, obtemos

$$v_n(x + y_n) = u^1(x) + o_n(1).$$

Calculando o baricentro em ambos os lados, obtemos

$$\beta(v_n(x + y_n)) = \beta(v_n) - y_n = -y_n,$$

pois  $(v_n) \in \mathcal{F}$ , e

$$\beta(u^1(x) + o_n(1)) \rightarrow \beta(u^1(x)),$$

pela continuidade de  $\beta$ , e  $\beta(u^1(x))$  é um valor fixo. Como  $|y_n| \rightarrow \infty$ , temos um absurdo. Assim, temos que  $b > c_\infty$ .

□

Tomemos agora  $u_0 \in E_\lambda$  a solução "ground state" radial do problema no infinito (4.14), e definamos o operador  $\Pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}$ , dado por

$$\Pi[y](x) = u_0\left(\frac{x - y}{\theta_y}\right),$$

onde  $\theta_y$  é justamente o  $\theta$  que projeta na variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$ . Pela unicidade de  $\theta_y$  e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que tal operador é contínuo.

Verificaremos agora algumas propriedades deste operador  $\Pi$ :

**Lema 4.23.**  $\beta(\Pi[y](x)) = y$ .

*Demonstração.* Seja  $v(x) = u_0 \left( \frac{x-y}{\theta_y} \right)$ . Então

$$\begin{aligned} \mu(v(\cdot))(x) &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} |v(z)| dz \\ &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} \left| u_0 \left( \frac{z-y}{\theta_y} \right) \right| dz \\ &= \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x-y)} \left| u_0 \left( \frac{w}{\theta_y} \right) \right| dw \\ &= \mu \left( u_0 \left( \frac{\cdot}{\theta_y} \right) \right) (x-y) \end{aligned}$$

Assim, temos que  $\hat{v}(x) = \hat{u}_0 \left( \frac{\cdot}{\theta_y} \right) (x-y)$ . Aplicando em  $\beta$ , e utilizando o fato que as normas em  $L^1(\mathbb{R}^N)$  são iguais, temos

$$\begin{aligned} \beta(v) &= \frac{1}{|\hat{v}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} x \hat{v}(x) dx = \frac{1}{|\hat{v}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} x \hat{u}_0 \left( \frac{\cdot}{\theta_y} \right) (x-y) dx \\ &= \frac{1}{|\hat{v}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} (z+y) \hat{u}_0 \left( \frac{\cdot}{\theta_y} \right) (z) dz \\ &= \frac{1}{|\hat{v}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} z \hat{u}_0 \left( \frac{\cdot}{\theta_y} \right) (z) dz + \frac{1}{|\hat{v}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} y \hat{u}_0 \left( \frac{\cdot}{\theta_y} \right) (z) dz \\ &= \beta \left( u_0 \left( \frac{\cdot}{\theta_y} \right) \right) + \frac{y}{|\hat{v}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{v}(y+z) dz = 0 + y = y \end{aligned}$$

onde utilizamos que  $\beta(u) = 0$  se  $u$  é radial. □

**Lema 4.24.**  $I(\Pi[y]) \rightarrow c_\infty$ , quando  $|y| \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* De fato,  $\Pi[y] \in \mathcal{P}$ , e em  $\mathcal{P}$  o funcional  $I$  pode ser escrito como

$$I(\Pi[y]) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla u_0 \left( \frac{x-y}{\theta_y} \right) \right|^2 dx + \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x F \left( u_0 \left( \frac{x-y}{\theta_y} \right) \right) dx.$$

Além disso, como  $u_0 \in \mathcal{P}_\infty$ , temos  $I_\infty(u_0) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx$  e podemos fazer uma mudança de variáveis obtendo

$$\begin{aligned} I(\Pi[y]) &= \frac{\theta_y^{N-2}}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx + \frac{\theta_y^N}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y) \cdot (\theta_y x + y) F(u_0^2(x)) dx \\ &= \theta_y^{N-2} I_\infty(u_0) + \frac{\theta_y^N}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y) \cdot (\theta_y x + y) F(u_0^2(x)) dx. \end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, por (4.2) e pelo fato de que  $\theta_y \rightarrow 1$  quando  $|y| \rightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(\theta_y x + y) \cdot (\theta_y x + y) F(u_0^2(x)) dx = 0.$$

Portanto,  $I(\Pi[y]) \rightarrow c_\infty$ , quando  $|y| \rightarrow \infty$ .

□

**Lema 4.25.** *Assuma que*

$$(A6) \quad \sup_{\mathbb{R}^N} |a_\infty - a(x)| < \frac{2a_\infty c_\infty}{\bar{\theta}^N \|u_0\|_\lambda^2}$$

onde  $\bar{\theta} = \theta(u_0) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \theta_y(u_0)$ . Então  $I(\Pi[y]) < 2c_\infty$ .

*Demonstração.* Observamos inicialmente que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\Pi[y](x)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F\left(u_0\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right) dx = \theta_y^N \int_{\mathbb{R}^N} F(u_0) dx.$$

Como  $u_0 \in \mathcal{P}_\infty$ , temos

$$\begin{aligned} N \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u_0) dx &= \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 dx + \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda u_0^2 dx \\ &< \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 + \lambda u_0^2 dx = \frac{N}{2} \|u_0\|_\lambda^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_0) dx < \frac{1}{2a_\infty} \|u_0\|_\lambda^2,$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\Pi[y](x)) dx < \frac{\theta_y^N}{2a_\infty} \|u_0\|_\lambda^2. \quad (4.23)$$

Por outro lado, temos que

$$I_\infty(\Pi[y]) = I_\infty\left(u_0\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right)\right) = I_\infty(u_0(x/\theta_y)),$$

pela invariância por translações da integral. Ainda, como  $u_0$  é a solução de energia mínima,  $I_\infty(u_0(x)) = c_\infty$  e o máximo da função  $t \mapsto I_\infty(u_0(\cdot/t))$  é atingido em  $t = 1$ . Como  $\theta_y > 1$ , temos que

$$I_\infty(\Pi[y]) < c_\infty. \quad (4.24)$$

De (4.23) e (4.24), temos que

$$\begin{aligned}
 I(\Pi[y]) &= I_\infty(\Pi[y]) + I(\Pi[y]) - I_\infty(\Pi[y]) \\
 &< c_\infty + \int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x)) F(\Pi[y]) dx \\
 &< c_\infty + \frac{2a_\infty c_\infty}{\bar{\theta}^N \|u_0\|_\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^N} F(\Pi[y](x)) dx \\
 &= c_\infty + \frac{2a_\infty c_\infty}{\|u_0\|_\lambda^2 \bar{\theta}} \frac{\theta_y^N \|u_0\|_\lambda^2}{2a_\infty} \\
 &< c_\infty + c_\infty = 2c_\infty
 \end{aligned}$$

Assim, temos que  $I(\Pi[y]) < 2c_\infty$ . □

Vamos agora apresentar uma versão do Teorema de Linking para sequências de Cerami.

**Definição 4.26.** *Seja  $S$  um subconjunto fechado de um espaço de Banach  $X$ , e seja  $Q$  uma subvariedade de  $X$  com fronteira relativa  $\partial Q$ . Dizemos que  $S$  e  $\partial Q$  "link" se:*

- 1)  $S \cap \partial Q = \emptyset$ ;
- 2) para qualquer  $h \in C^0(X, X)$  tal que  $h|_{\partial Q} = id$ , vale  $h(Q) \cap S \neq \emptyset$ .

Ainda, se  $S$  e  $Q$  são como acima e  $B$  é um subconjunto de  $C^0(X, X)$ , então  $S$  e  $\partial Q$  "link" com respeito à  $B$  se (1) vale e se (2) vale para qualquer  $h \in B$ .

**Teorema 4.27.** *(Linking) Suponha que  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  seja um funcional satisfazendo (Ce). Considere um subconjunto fechado  $S \subset X$  e uma subvariedade  $Q \subset X$  com fronteira relativa  $\partial Q$ . Suponha que:*

- a)  $S$  e  $\partial Q$  "link";
- b)  $b = \inf_{u \in S} I(u) > \sup_{u \in \partial Q} I(u) = b_0$ .
- c)  $\sup_{u \in Q} I(u) < +\infty$ .

Seja  $B = \{h \in C^0(X, X); h|_{\partial Q} = id\}$ . O número

$$d = \inf_{h \in B} \sup_{u \in Q} I(h(u))$$

define um valor crítico de  $I$ , com  $d \geq b$ .

A demonstração de tal teorema pode ser encontrada no Apêndice. Temos assim, o nosso resultado principal:

**Teorema 4.28.** *Suponha que sejam válidas as condições (A1 – A6) e (f1 – f3). Então a equação (4.1) possui uma solução positiva.*

*Demonstração.* Pela condição (A4), temos que  $I_\infty(u) < I(u)$  para toda  $u \in E_\lambda \setminus \{0\}$ . Em particular,  $I_\infty(\Pi[y]) < I(\Pi[y])$ , para qualquer  $y \in \mathbb{R}^N$ . Como  $I(\Pi[y]) \rightarrow c_\infty$  quando  $|y| \rightarrow \infty$ , pelo Lema 4.24, e  $b > c_\infty$  pelo Lema 4.22, existe  $\bar{\rho} > 0$  tal que para todo  $\rho \geq \bar{\rho}$ ,

$$c_\infty < \max_{|y|=\rho} I(\Pi[y]) < b. \quad (4.25)$$

Para aplicar o Teorema de Linking, tomamos

$$Q = \Pi(\overline{B_{\bar{\rho}}(0)}) \text{ e } S = \{u \in \mathcal{P}; \beta(u) = 0\}.$$

Mostraremos que  $\partial Q$  e  $S$  "link". Como  $\beta(\Pi[y]) = y$ , do Lema 4.23, temos que  $\partial Q \cap S = \emptyset$ , pois se  $u \in S$ , temos  $\beta(u) = 0$ , e se  $u \in \partial Q$ , então  $\beta(u) = y \neq 0$ , pois  $|y| = \bar{\rho} > 0$ . Precisamos agora mostrar que  $h(Q) \cap S \neq \emptyset$ , para qualquer  $h \in H$ , onde  $H = \{h \in C(Q, \mathcal{P}); h|_{\partial Q} = id\}$ .

Dada  $h \in H$ , definimos  $T : \overline{B_{\bar{\rho}}(0)} \rightarrow \mathbb{R}^N$  por  $T(y) = \beta \circ h \circ \Pi[y]$ . Por ser a composição de funções contínuas, temos que  $T$  é contínua e, para qualquer  $|y| = \bar{\rho}$ , temos que  $\Pi[y] \in \partial Q$ , assim,  $h \circ \Pi[y] = \Pi[y]$ , pois  $h|_{\partial Q} = id$  e, finalmente,  $T(y) = y$ . Pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer, temos garantida a existência de  $\tilde{y} \in B_{\bar{\rho}}(0)$  tal que  $T(\tilde{y}) = 0$ , o que implica que  $h(\Pi[\tilde{y}]) \in S$ . Portanto, temos que  $h(Q) \cap S \neq \emptyset$  e assim  $S$  e  $\partial Q$  "link".

Ainda, temos que (4.25) pode ser escrita como  $b = \inf_S I > \max_{\partial Q} I$ . Definimos

$$d = \inf_{h \in H} \max_{u \in Q} I(h(u)).$$

Temos que  $d \geq b$ . De fato, temos que  $h(Q) \cap S \neq \emptyset$ , para toda  $h \in H$ . Fixada uma  $h$ , temos que existe  $w \in S$  tal que  $w$  também pertence à  $h(Q)$ , ou seja,  $w = h(v)$  para alguma  $v \in \Pi(\overline{B_{\bar{\rho}}(0)})$ . Assim,

$$I(w) \geq \inf_{u \in S} I(u) \text{ e } \max_{u \in Q} I(h(u)) \geq I(h(v)).$$

Logo,

$$\max_{u \in Q} I(h(u)) \geq I(h(v)) = I(w) \geq \inf_{u \in S} I(u) = b,$$

e assim

$$\inf_{h \in H} \max_{u \in Q} I(h(u)) \geq b.$$

Em particular, temos que  $d > c_\infty$ , pois  $b > c_\infty$ , do Lema 4.22. Ainda, se tomamos  $h = id$ , temos

$$\inf_{h \in H} \max_{u \in Q} I(h(u)) < \max_{u \in Q} I(u) < 2c_\infty,$$

devido ao Lema 4.25, ou seja,  $d < 2c_\infty$ . Portanto, temos pelo Lema 4.21 que a condição de Cerami é satisfeita no nível  $d$ . Assim, podemos aplicar o Teorema de Linking e concluir que  $d$  é um valor crítico para o funcional  $I$ . Portanto, temos garantida a existência de uma solução não nula para a equação. Pelas condições iniciais sobre a função  $f$ , temos que tal solução é estritamente positiva.  $\square$

## 4.4 Solução não-nula para o sistema

Nas seções anteriores, estudamos a equação (4.1) e obtemos uma solução positiva para mesma, via Teorema de Linking. Voltemos agora ao nosso problema inicial  $(P_a)$ ,

$$(P_a) \begin{cases} -\Delta u + u &= a(x) \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 + v^2)} u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= a(x) \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 + v^2)} v + \lambda u. \end{cases}$$

Inicialmente, queríamos resolver um sistema como o sistema estudado no Capítulo 3, mas com condições sobre o comportamento da função  $a(x)$  de maneira que os funcionais obedecessem a relação  $I_\infty \leq I$ . Entretanto, encontramos dificuldades para identificar como a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}$  associada ao sistema  $(P_a)$  se comportava e quais condições deveríamos impor sobre a função  $a(x)$  para termos as mesmas propriedades que obtivemos no caso escalar. Por isso optamos por, de certa forma, simplificar o sistema em questão de maneira a deixá-lo similar à equação estudada. Com isso, não encontramos praticamente nenhuma dificuldade para passar do caso escalar para o sistema.

Vamos considerar as mesmas hipóteses (A1 – A6) sobre a função  $a$  e trabalharemos novamente com a norma padrão de  $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ . Associado à este problema, temos o funcional

$$I_a(u, v) = \frac{1}{2} \|(u, v)\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} H_a(x, u, v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda uv dx,$$

onde

$$H_a(x, u, v) = a(x) \left( \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + (u^2 + v^2)) \right).$$

Ainda, podemos mostrar para todo  $\varepsilon > 0$  e considerando  $z^2 = u^2 + v^2$ , que

$$|H_a(x, z)| \leq \frac{z^2 \varepsilon}{2} + M(\varepsilon) z^p, 2 < p < 2^*.$$

Considerando  $F_a(x, u, v) := H_a(x, u, v) + \lambda uv$ , podemos facilmente verificar, que tal função satisfaz a condição de não-quadraticidade definida no Capítulo 1.

Com estas observações, temos todas as condições necessárias para realizarmos novamente todos os passos que fizemos neste capítulo. Por exemplo, para este sistema  $(P_a)$ , temos que a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}_a$  é dada por

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G_a(x, u, v) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla a(x) \cdot x H_a(x, u, v) dx,$$

onde  $G_a(x, u, v) = a(x)H_a(x, u, v) + \lambda uv - \frac{u^2 + v^2}{2}$ .

Para o problema limite,

$$(P_{a,\infty}) \begin{cases} -\Delta u + u &= a_\infty \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 + v^2)} u + \lambda v \\ -\Delta v + v &= a_\infty \frac{u^2 + v^2}{1 + (u^2 + v^2)} v + \lambda u \end{cases}$$

temos a variedade de Pohozaev  $\mathcal{P}_{a,\infty}$  dada por

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G_{a,\infty}(u, v) dx$$

onde  $G_{a,\infty}(u, v) = a_\infty H_{a,\infty}(u, v) + \lambda uv - \frac{u^2 + v^2}{2}$ .

Temos que o problema limite satisfaz todas as propriedades verificadas no Capítulo 1 deste trabalho. Assim, podemos mostrar aqui as mesmas relações entre as variedades  $\mathcal{P}_a$  e  $\mathcal{P}_{a,\infty}$  do começo deste capítulo e concluir que o nível

$$p_a = \inf_{(u,v) \in \mathcal{P}_a} I_a(u, v),$$

não é atingido, e portanto, não é um nível crítico para o funcional  $I_a$ .

Definimos a função baricentro neste caso como sendo

$$\beta(u, v) = \frac{1}{|\hat{u}|_{L^1} + |\hat{v}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} x(\hat{u}(x) + \hat{v}(x)) dx \in \mathbb{R}^N,$$

onde  $\hat{u}$  é como definida anteriormente. Com isso, podemos mostrar a existência (via

Teorema de Ghoussoub-Preiss), a limitação das sequências de Cerami (via condição de Não-Quadraticidade, como no Lema 4.19) e podemos provar um Lema de Splitting, como o Lema 4.20.

Em seguida, considerando  $(u_0, v_0)$  a solução ground state radial do problema  $(P_{a,\infty})$ , definimos o operador  $\Pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}_a$ , dado por

$$\Pi[y](x) = \left( u_0\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right), v_0\left(\frac{x-y}{\theta_y}\right) \right),$$

onde  $\theta_y$  é novamente o  $\theta$  que projeta na variedade  $\mathcal{P}_a$ .

Observamos ainda que, para o caso do sistema, precisamos impor a condição de que  $c_\infty$  é um ponto crítico isolado do funcional  $I_\infty$ , para garantir que nosso nível minimax não irá coincidir com nenhum dos valores críticos de  $(P_{a,\infty})$ .

Assim, temos todas as ferramentas necessárias para aplicar novamente o Teorema de Linking 4.27 e obter uma solução não-nula para o sistema  $(P_a)$ .



# Resultados Auxiliares

## A.1 Teorema de Ghoussoub-Preiss

Apresentamos aqui algumas definições e observações sobre o Teorema de Ghoussoub-Preiss:

**Definição A.1.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Um subconjunto fechado  $F$  separa dois pontos  $z_0$  e  $z_1$  em  $X$  se  $z_0$  e  $z_1$  pertencem a componentes conexas disjuntas em  $X \setminus F$ .*

**Observação A.1.** *Como  $X \setminus F$  é localmente conexo, qualquer componente será um aberto e um fechado de  $X \setminus F$  e assim, aberto em  $X$ . Denotando por  $\Omega_0$  a componente contendo  $z_0$  e por  $\Omega_1$  a união de todas as componentes não contendo  $z_0$ , conseguimos uma partição de  $X \setminus F$  em dois conjuntos abertos disjuntos, com  $z_0 \in \Omega_0$  e  $z_1 \in \Omega_1$ .*

A prova do seguinte teorema pode ser encontrada em [23], Teorema 6.

**Teorema A.2.** *(Ghoussoub-Preiss) Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional contínuo, tal que  $\phi' : X \rightarrow X'$  seja contínuo. Tome dois pontos  $z_0$  e  $z_1$  em  $X$  e considere o conjunto  $\Gamma$  de todos os caminhos de  $z_0$  para  $z_1$*

$$\Gamma := \{ \gamma \in C^0([0, 1]; X) \mid \gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z_1 \}.$$

Defina um número  $c$  por

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

Assuma que existe um subconjunto fechado  $F$  de  $X$  tal que  $F \cap \phi_c$  separa  $z_0$  e  $z_1$  com  $\phi_c := \{x \in X \mid \phi(x) \geq c\}$ . Então existe uma sequência  $\{x_n\}$  em  $X$  tal que a distância

geodésica  $\delta$  satisfaz

$$\delta(x_n, F) \rightarrow 0;$$

$$\phi(x_n) \rightarrow c;$$

$$\|\phi'(x_n)\|(1 + \|x_n\|) \rightarrow 0.$$

**Observação A.2.** *Tal distância geodésica, mencionada acima é definida da seguinte maneira: Dado um espaço de Banach  $(X, \|\cdot\|)$ , primeiramente definimos o comprimento geodésico  $l(\gamma)$  de uma curva  $\gamma \in C^1([0, 1], X)$  por*

$$l(\gamma) := \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 + \|\gamma(t)\|} dt.$$

Assim, a distância geodésica  $\delta$  entre dois pontos  $x_1$  e  $x_2$  em  $X$  é dada por

$$\delta(x_1, x_2) := \inf \{l(\gamma) | \gamma \in C^1, \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2\}. \quad (\text{A.1})$$

Claramente, temos que  $\delta(x_1, x_2) \leq \|x_1 - x_2\|$ . Reciprocamente, para todo conjunto  $B$  limitado na norma em  $X$ , existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que  $\delta(x_1, x_2) \geq \alpha \|x_1 - x_2\|$ , sempre que  $x_1, x_2 \in B$ .

Por simetria radial, quando  $x_1 = 0$ , o ínfimo em (A.1) deve ser atingido no segmento de reta de 0 à  $x_2 = x$ . Assim,

$$\delta(0, x) = \int_0^1 \frac{\|x\|}{1 + t\|x\|} dt = \ln(1 + \|x\|).$$

Segue então que os subconjuntos de  $X$   $\delta$ -limitados e limitados na norma são os mesmos. Qualquer sequência de Cauchy para  $\delta$  é  $\delta$ -limitada e assim, limitada na norma. Pelas considerações iniciais, é também uma sequência de Cauchy na norma, e assim, convergente na norma e em  $\delta$ . Então,  $(X, \delta)$  é um espaço métrico completo.

## A.2 Propriedades da função baricentro

Apresentamos agora as propriedades da função baricentro:

(a) Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

(b) Se  $u$  é uma função radial, então  $\beta(u) = 0$ . Pela construção da função  $\hat{u}$ , temos que se  $u$  é radial, então  $\hat{u}$  também é radial. Assim, mostraremos que  $\int_{\mathbb{R}^N} x \hat{u}(x) dx = 0$ , onde  $\hat{u}(x) = \hat{u}(|x|)$ . Para isto, faremos uso das coordenadas esféricas, assim definidas: seja  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ . Em coordenadas esféricas, teremos uma coordenada radial  $r$ , e

$N - 1$  coordenadas angulares,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}$ , com  $\varphi_1, \dots, \varphi_{N-2}$  variando em  $[0, \pi]$  e  $\varphi_{N-1}$  variando em  $[0, 2\pi)$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1 \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ &\vdots \\ x_{N-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{N-2} \cos \varphi_{N-1} \\ x_N &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{N-2} \sin \varphi_{N-1}. \end{aligned}$$

O jacobiano de tal mudança de coordenadas é dado por

$$J = \left| \det \frac{\partial(x_i)}{\partial(r, \varphi_i)} \right| = r^{N-1} \sin^{N-2} \varphi_1 \sin^{N-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{N-2}.$$

Observamos que, como  $x \in \mathbb{R}^N$ , a integral  $\int_{\mathbb{R}^N} x \hat{u}(x) dx$  é uma expressão vetorial, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} x \hat{u}(x) dx = \left( \int_{\mathbb{R}^N} x_1 \hat{u}(x) dx, \int_{\mathbb{R}^N} x_2 \hat{u}(x) dx, \dots, \int_{\mathbb{R}^N} x_N \hat{u}(x) dx \right).$$

Mostraremos que cada uma das entradas desse vetor é nula. Como  $\hat{u}(x)$  é radial, ao fazermos a mudança de coordenadas, temos que  $\hat{u}(x) = \hat{u}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}) = \hat{u}(r)$ , ou seja,  $\hat{u}$  depende somente da coordenada  $r$ . Começamos considerando a integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_1 \hat{u}(x) dx = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty r \cos \varphi_1 \hat{u}(r) J dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1}.$$

Lembrando que estamos considerando  $N \geq 3$ , para a integral na variável  $\varphi_1$ , teremos

$$\int_0^\pi \cos \varphi_1 \sin^{N-2} \varphi_1 d\varphi_1 = \left. \frac{\sin^{N-1} \varphi_1}{N-1} \right|_0^\pi = 0,$$

e assim, toda a integral se anulará. Para a integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_2 \hat{u}(x) dx = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \hat{u}(r) J dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1},$$

consideramos a variável  $\varphi_2$  e obtemos

$$\int_0^\pi \cos \varphi_2 \sin^{N-3} \varphi_2 d\varphi_2 = \left. \frac{\sin^{N-2} \varphi_2}{N-2} \right|_0^\pi = 0.$$

Assim, de maneira geral, para  $1 \leq j < N - 1$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_j \hat{u}(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty r \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \operatorname{sen} \varphi_{j-1} \cos \varphi_j \hat{u}(r) J dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1},$$

e considerando a variável  $\varphi_j$  obtemos

$$\int_0^\pi \cos \varphi_j \operatorname{sen}^{N-(j+1)} \varphi_j d\varphi_j = \left. \frac{\operatorname{sen}^{N-j} \varphi_j}{N-j} \right|_0^\pi = 0.$$

Por último, para

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_N \hat{u}(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^\infty r \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \operatorname{sen} \varphi_{N-2} \operatorname{sen} \varphi_{N-1} \hat{u}(r) J dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1},$$

consideramos a variável  $\varphi_{N-1}$ , que varia em  $[0, 2\pi)$ , obtemos

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi_{N-1} d\varphi_{N-1} = 0.$$

Assim, todas as entradas do vetor se anulam e temos que  $\beta(u) = 0$ , se  $u$  é uma função radial.

(c) Temos que  $\mu(u(\cdot))(x - y) = \mu(u(\cdot - y))(x)$ . De fato,

$$\mu(u(\cdot - y))(x) = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x)} |u(z - y)| dz = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1(x-y)} |u(t)| dt = \mu(u(\cdot))(x - y).$$

Assim, a função  $u(x - y)$  gera a função  $\hat{u}(x - y)$ . Então,

$$\begin{aligned} \beta(u_y) &= \beta(u(x - y)) = \frac{1}{|\hat{u}(x - y)|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} x \hat{u}(x - y) dx \\ &= \frac{1}{|\hat{u}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} (x + y) \hat{u}(x) dx = \frac{1}{|\hat{u}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} x \hat{u}(x) dx + \frac{1}{|\hat{u}|_{L^1}} \int_{\mathbb{R}^N} y \hat{u}(x) dx \\ &= \beta(u) + y \frac{|\hat{u}|_{L^1}}{|\hat{u}|_{L^1}} = \beta(u) + y \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que  $\hat{u}(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^N$  e assim,  $\hat{u}(x) = |\hat{u}(x)|$ .

### A.3 Limitação das sequências de Cerami

Apresentamos agora a demonstração do Lema 4.19:

*Demonstração.* Seguiremos as mesmas ideias apresentadas nos capítulos anteriores, com as devidas adaptações. Então, suponhamos que  $\|u_n\|_\lambda \rightarrow \infty$ . Definamos  $\hat{u}_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_\lambda}$ , uma seqüência limitada com  $\|\hat{u}_n\|_\lambda = 1$ , tal que  $\hat{u}_n \rightharpoonup \hat{u}$ , a menos de subsequências. Assim, um dos casos abaixo deve ocorrer:

$$\text{Caso 1 : } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n(x)|^2 dx > 0;$$

$$\text{Caso 2 : } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n(x)|^2 dx = 0.$$

Suponhamos que o caso 2 ocorra. Tomemos  $L > 1$  e então

$$I\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda} u_n\right) = \frac{1}{2} L^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda} u_n\right) dx.$$

Dados  $\varepsilon > 0$  e  $2 \leq p \leq 2^*$  temos por (4.6) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda} u_n\right) dx < a_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varepsilon}{2\lambda} L^2 (\lambda \hat{u}_n^2) dx + C(p) L^p \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_n^p dx.$$

Pelo Lema de Lions [51], temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_n^p dx \rightarrow 0.$$

Ainda,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}_n^2 dx \leq \|u_n\|_\lambda^2 \leq 1.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) F\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda} u_n\right) dx < \frac{\varepsilon a_\infty}{2\lambda} L^2 + o_n(1).$$

Tomando  $\varepsilon = \frac{\lambda}{4a_\infty}$ , obtemos

$$I\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda} u_n\right) > \frac{L^2}{2} - \left(\frac{L^2}{4} + o_n(1)\right) = \frac{L^2}{4} - o_n(1).$$

Como  $\|u_n\|_\lambda \rightarrow \infty$ , temos que  $\frac{L}{\|u_n\|_\lambda} \in (0, 1)$  para  $n > 0$  suficientemente grande e assim

$$\max_{t \in [0,1]} I(tu_n) \geq I\left(\frac{L}{\|u_n\|_\lambda} u_n\right) > \frac{L^2}{4} - o_n(1).$$

Seja  $t_n \in (0, 1)$  tal que  $I(t_n u_n) = \max_{t \in [0, 1]} I(t u_n)$ . Então

$$I(t_n u_n) > \frac{L^2}{4} - o_n(1). \quad (\text{A.2})$$

Mas, como  $t_n \leq 1$ , por (f3) temos

$$\begin{aligned} I(t_n u_n) &= I(t_n u_n) - \frac{1}{2} I'(t_n u_n)(t_n u_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left( \frac{1}{2} f(t_n u_n)(t_n u_n) - F(t_n u_n) \right) dx \\ &\leq D \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left( \frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) dx \\ &= D(I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n) u_n) \\ &= Dd + o_n(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$I(t_n u_n) \leq Dd + o_n(1). \quad (\text{A.3})$$

De (A.2) e (A.3) obtemos

$$\frac{L^2}{4} - o_n(1) < I(t_n u_n) \leq Dd + o_n(1).$$

Fazendo  $L > 0$  suficientemente grande, obtemos uma contradição.

Suponhamos que o caso 1 ocorra, ou seja  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\hat{u}_n|^2 dx = \delta > 0$ . Assim, se  $(y_n)$  é uma sequência tal que  $|y_n| \rightarrow \infty$  e  $\int_{B_1(y_n)} |\hat{u}_n|^2 dx > \delta/2$ , considerando que  $\hat{u}_n(x + y_n) \rightharpoonup \hat{u}(x)$ , temos

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx > \delta/2,$$

e portanto,

$$\int_{B_1(0)} |\hat{u}(x)|^2 dx > \delta/2,$$

ou seja,  $\hat{u} \neq 0$ . Logo, existe  $\Omega \subset B_1(0)$ , com  $|\Omega| > 0$  tal que

$$0 < |\hat{u}(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}_n(x + y_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n(x + y_n)|}{\|u_n\|_\lambda}, \forall x \in \Omega.$$

Como temos que  $\|u_n\|_\lambda \rightarrow \infty$ , então necessariamente,

$$u_n(x + y_n) \rightarrow \infty, \forall x \in \Omega \subset B_1(0).$$

Assim, pela condição (f3), pelo Lema de Fatou e por (A1), com  $\sigma := \inf a(x)$  temos

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x) \frac{1}{2} (f(u_n(x + y_n))u_n(x + y_n) - F(u_n(x + y_n))) dx \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \sigma \frac{1}{2} (f(u_n(x + y_n))u_n(x + y_n) - F(u_n(x + y_n))) dx \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma \frac{1}{2} (f(u_n(x + y_n))u_n(x + y_n) - F(u_n(x + y_n))) dx \\ & \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma \frac{1}{2} (f(u_n(x + y_n))u_n(x + y_n) - F(u_n(x + y_n))) dx \\ & = +\infty \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que  $|I'(u_n)u_n| \leq \|I'(u_n)\| \|u_n\|_\lambda \rightarrow 0$ , e portanto,  $I'(u_n)u_n = o_n(1)$ . Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) \frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) dx = I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \leq d + 1,$$

o que é uma contradição.

Se  $|y_n| \leq R$ ,  $R > 1$ , obtemos

$$\frac{\delta}{2} \leq \int_{B_1(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx \leq \int_{B_{2R}(0)} |\hat{u}_n(x + y_n)|^2 dx,$$

e como  $\hat{u}_n(x + y_n) \rightarrow \hat{u}$  em  $B_{2R}(0)$ , segue que

$$\delta/2 \leq \int_{B_1(0)} |\hat{u}(x)|^2 dx.$$

Logo, como anteriormente, existe  $\Omega \subset B_1(0)$ ,  $|\Omega| > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n(x + y_n)|}{\|u_n\|_\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}_n(x + y_n)| = |\hat{u}(x)| \neq 0, \forall x \in \Omega.$$

Assim, o argumento segue análogo ao caso em que  $|y_n| \rightarrow \infty$ . Portanto, o caso 1 também não pode ocorrer.

□

## A.4 Lema de Splitting

Antes de demonstrar o Lema 4.20, temos o seguinte resultado:

**Lema A.3.** *Assuma (f1) e (f2). Se  $u_n \rightharpoonup u_0$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ , então*

$$f(u_n) - f(u_n - u_0) \rightarrow f(u_0)$$

em  $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ .

*Demonstração.* De (f1) e (f2) segue que dado  $\varepsilon > 0$  existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C|s|, \forall s \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.4})$$

Como  $u_n \rightharpoonup u_0$ , então  $(u_n)$  é uma sequência limitada, isto é, existe  $M > 0$  tal que  $\|u_n\|_\lambda \leq M$ . Assim,

$$|f(u_n)| \leq \varepsilon|u_n| + C|u_n| = (\varepsilon + C)|u_n|,$$

e  $u_n(x) \rightarrow u_0(x)$  qtp  $x \in \mathbb{R}^N$ . Como  $f$  é contínua, temos que  $f(u_n(x)) \rightarrow f(u_0(x))$ . Assim dado  $w \in E_\lambda$  temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(f(u_n) - f(u_n - u_0) - f(u_0))w| dx \leq (\varepsilon + C) \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n| + |u_n - u_0| + |u_0|)w dx = o_n(1),$$

pelo Lema 1.7 com  $p = 2$ . □

Apresentamos agora a demonstração do Lema 4.20:

*Demonstração.* Como  $(u_n)$  é uma sequência limitada, temos que  $u_n \rightharpoonup \bar{u}$  em  $E_\lambda$ . Mostraremos que  $I'(\bar{u}) = 0$ . Da imersão compacta de  $H^1(\mathbb{R}^N)$  em  $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq r < 2^*$ , temos que  $u_n \rightarrow \bar{u}$  em  $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ . Como  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  é denso em  $E_\lambda$ , fixamos  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  e consideramos  $K = \text{supp}\varphi$ . Então

$$a(x)f(u_n(x))\varphi(x) \rightarrow a(x)f(\bar{u}(x))\varphi(x) \text{ qtp } x \in K,$$

e existe  $h(x) \in L^r_{loc}(K)$  tal que

$$|u_n(x)|, |\bar{u}(x)| \leq h(x), \text{ qtp } x \in K.$$

Ainda, da estimativa (A.4) com  $\varepsilon = 1$  temos

$$|a(x)f(u_n(x))\varphi(x)| \leq a_\infty(1 + C)|u_n(x)|\|\varphi\|_\infty \leq \tilde{C}h(x) \text{ qtp } x \in K,$$



onde  $\tilde{C}h(x) \geq 0$  e tal função pertence à  $L^1(K)$ . Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(u_n(x))\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)f(\bar{u}(x))\varphi(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, pela convergência fraca de  $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi + \lambda u_n \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u} \nabla \varphi + \lambda \bar{u} \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Então,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I'(u_n)\varphi = I'(\bar{u})\varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty,$$

e portanto,

$$I'(\bar{u}) = 0.$$

Suponhamos agora que a sequência  $(u_n)$  não converge forte à  $\bar{u}$ . Seja  $u_{n,1} := u_n - \bar{u}$ . Assim, temos que  $u_{n,1} \rightharpoonup 0$ . Mostraremos que

$$\text{a) } \|u_{n,1}\|_\lambda^2 = \|u_n\|_\lambda^2 - \|\bar{u}\|_\lambda^2 + o_n(1);$$

$$\text{b) } I_\infty(u_{n,1}) \rightarrow d - I(\bar{u});$$

$$\text{c) } I'(u_{n,1}) \rightarrow 0.$$

(a) Como  $u_n \rightharpoonup \bar{u}$  em  $E$ , então  $\langle u_n, \bar{u} \rangle \rightarrow \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = \|\bar{u}\|_\lambda^2$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|u_{n,1}\|_\lambda^2 &= \|u_n - \bar{u}\|_\lambda^2 = \langle u_n - \bar{u}, u_n - \bar{u} \rangle \\ &= \langle u_n, u_n \rangle - \langle u_n, \bar{u} \rangle - \langle \bar{u}, u_n \rangle + \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \\ &= \|u_n\|_\lambda^2 - 2\langle u_n, \bar{u} \rangle + \|\bar{u}\|_\lambda^2 \\ &= \|u_n\|_\lambda^2 - \|\bar{u}\|_\lambda^2 + o_n(1) \end{aligned}$$

(b) Temos que

$$\begin{aligned}
I_\infty(u_{n,1}) - I(u_n) + I(\bar{u}) &= \frac{1}{2}\|u_{n,1}\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u_{n,1})dx - \frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u_n)dx \\
&+ \frac{1}{2}\|\bar{u}\|_\lambda^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(\bar{u})dx \\
&= o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty F(u_{n,1})dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u_n)dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(\bar{u})dx + \left( \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u_{n,1})dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u_{n,1})dx \right) \\
&= o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x))F(u_{n,1})dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} a(x)(F(u_n) - F(\bar{u}) - F(u_{n,1}))dx,
\end{aligned}$$

onde utilizamos o item (a).

**Afirmção 7.**  $\int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x))F(u_{n,1})dx = o_n(1).$

**Afirmção 8.**  $\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)(F(u_n) - F(\bar{u}) - F(u_{n,1}))|dx = o_n(1).$

Portanto,  $I_\infty(u_{n,1}) - I(u_n) + I(\bar{u}) = o_n(1)$ , e como  $I(u_n) \rightarrow d$ , temos

$$I_\infty(u_{n,1}) \rightarrow d - I(\bar{u}).$$

*Verificação da Afirmção 7:* Temos que  $u_{n,1} \rightharpoonup 0$ . Então,  $u_{n,1} \rightarrow 0$  em  $L^p(B_R(0))$ , para  $2 \leq p < 2^*$ . Mostraremos primeiramente então que

$$\int_{B_R(0)} (a_\infty - a(x))F(u_{n,1})dx = o_n(1).$$

De fato, da estimativa (4.6) com  $\varepsilon = 1$  e  $p = 2$  temos

$$|(a_\infty - a(x))F(u_{n,1})| \leq (a_\infty + |a(x)|)|F(u_{n,1})| \leq 2a_\infty(1 + C(2))|u_{n,1}|^2.$$

Assim,

$$\int_{B_R(0)} |(a_\infty - a(x))F(u_{n,1})|dx \leq \tilde{C} \int_{B_R(0)} |u_{n,1}|^2 dx \rightarrow 0, \text{ em } B_R(0).$$

Para a integral sobre  $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$ , temos

$$\int_{\Omega} |a_{\infty} - a(x)| |F(u_{n,1})| dx \leq \int_{\Omega} |a_{\infty} - a(x)| C(p) |u_{n,1}|^2 dx.$$

Mas, como  $a(x) \rightarrow a_{\infty}$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que se  $|x| > R$ , então  $|a_{\infty} - a(x)| < \varepsilon$ , assim

$$\left| \int_{\Omega} (a_{\infty} - a(x)) F(u_{n,1}) dx \right| \leq C(p) \varepsilon \int_{\Omega} |u_{n,1}|^2 dx \leq C(p) \varepsilon \|u_{n,1}\|_2^2,$$

e o resultado segue pois  $(u_{n,1})$  é limitada.

*Verificação da Afirmação 8:* Como  $a(x) < a_{\infty}$ , temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |a(x)(F(u_n) - F(\bar{u}) - F(u_{n,1}))| dx \leq a_{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n) - F(\bar{u}) - F(u_{n,1})| dx.$$

Assim, mostraremos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n) - F(\bar{u}) - F(u_{n,1})| dx = o_n(1).$$

Nossa ideia é utilizar novamente o Lema 3.5. Como  $F$  é contínua e  $F(0) = 0$ , mostraremos que dado  $\varepsilon > 0$ , existem funções contínuas  $\varphi_{\varepsilon}$  e  $\psi_{\varepsilon}$  tais que  $|F(a+b) - F(a)| \leq \varepsilon \varphi_{\varepsilon}(a) + \psi_{\varepsilon}(b)$ .

De fato, se  $0 \leq t \leq 1$  temos, por (A.4) que

$$\begin{aligned} |F(a-b) - F(a)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} F(a-tb) dt \right| = \left| \int_0^1 f(a-tb)(-b) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(a-tb)| |b| dt \leq C \left( \int_0^1 |a-tb| |b| dt \right) \\ &\leq C(p)(|a||b| + |b|^2) \leq C(\varepsilon|a| + (C_{\varepsilon} + 1)|b|^2), \end{aligned}$$

assim,  $\varphi_{\varepsilon}(a) = C|a|$  e  $\psi_{\varepsilon}(b) = (C_{\varepsilon} + 1)|b|^2$ .

Tomando  $u_n = \bar{u} + u_{n,1}$  e sabendo que  $u_{n,1} \rightarrow 0$  qtp  $x \in \mathbb{R}^N$ , podemos aplicar o Lema 3.5 e concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(u_n) - F(\bar{u}) - F(u_{n,1})| dx = o_n(1).$$

(c) Utilizaremos aqui o Lema A.3. Temos para toda função  $h \in E_\lambda$ , que

$$\begin{aligned}
o_n(1) = I'(u_n)h &= I'(u_{n,1} + \bar{u})h \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_{n,1} \nabla h + \lambda u_{n,1} h dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u} \nabla h + \lambda \bar{u} h dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u_{n,1} + \bar{u}) h dx \\
&= I'_\infty(u_{n,1}) + I'(\bar{u}) + \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty f(u_{n,1}) h dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(\bar{u}) h dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} a(x) f(u_{n,1} + \bar{u}) h dx \\
&= I'_\infty(u_{n,1}) + I'(\bar{u}) + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) (f(\bar{u}) + f(u_{n,1}) - f(u_{n,1} + \bar{u})) h dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x)) f(u_{n,1}) h dx \\
&= I'_\infty(u_{n,1}) + I'(\bar{u}) + \int_{\mathbb{R}^N} a(x) (f(\bar{u}) + f(u_n - \bar{u}) - f(u_n)) h dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x)) f(u_{n,1}) h dx.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} a(x) (f(\bar{u}) + f(u_n - \bar{u}) - f(u_n)) h dx \right| \leq a_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |(f(\bar{u}) + f(u_n - \bar{u}) - f(u_n))| |h| dx.$$

Assim, utilizando o Lema A.3 obtemos que tal integral converge à zero.

Ainda, temos que  $\int_{\mathbb{R}^N} (a_\infty - a(x)) f(u_{n,1}) h dx = o_n(1)$ . De fato, definindo  $g_n(x) = f(u_{n,1}(x))$ , temos que  $g_n(x) \rightarrow 0$  qtp  $x \in \mathbb{R}^N$ , pois  $(u_{n,1})$  é limitada e converge à zero qtp  $x \in \mathbb{R}^N$ . Ainda, temos que

$$\|g_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(u_{n,1})^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} C |u_{n,1}|^2 dx.$$

Assim, temos que

$$\|g_n\|_2^2 \leq C \|u_{n,1}\|_2^2 \leq M,$$

pois  $(u_{n,1})$  é limitada em  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Pelo Lema 1.7, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_n(x) \varphi(x) dx = o_n(1), \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Como  $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  é denso em  $L^2(\mathbb{R}^N)$ , segue o resultado e temos que  $I'(u_{n,1}) \rightarrow 0$ .

Temos ainda que

$$0 = I'_\infty(u_{n,1})u_{n,1} + o_n(1),$$

ou seja,

$$\|u_{n,1}\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty f(u_{n,1})u_{n,1}dx + o_n(1). \quad (A.5)$$

Como estamos supondo que  $u_{n,1} \rightharpoonup 0$  em  $E_\lambda$ , tomemos

$$\delta = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |u_{n,1}|^2 dx.$$

Se  $\delta = 0$ , segue do Lema de Lions ( Lema 1.2 de [51]) que

$$u_{n,1} \rightarrow 0 \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N), 2 < p < 2^*.$$

Assim, de (A.5), e das estimativas sobre  $F$ , com  $2 \leq p \leq 2^*$ , temos

$$\begin{aligned} \|u_{n,1}\|_\lambda^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} a_\infty f(u_{n,1})u_{n,1}dx + o_n(1) \\ &\leq a_\infty C(p) \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n,1}|^{p-1}|u_{n,1}|dx \\ &= \tilde{C} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n,1}|^p, \end{aligned}$$

e assim

$$\|u_{n,1}\|_\lambda \rightarrow 0 \text{ em } E_\lambda,$$

o que é uma contradição. Suponhamos então que  $\delta > 0$ . Então existe uma sequência  $(y_n^1) \subset \mathbb{R}^N$  tal que

$$\int_{B_1(y_n^1)} |u_{n,1}|^2 dx > \delta/2.$$

Consideremos então a sequência  $(u_{n,1}(\cdot + y_n^1))$ . Podemos assumir que tal sequência satisfaz

$$u_{n,1}(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u_1 \text{ em } E_\lambda$$

e

$$u_{n,1}(x + y_n^1) \rightarrow u_1(x) \text{ qtp } x \in \mathbb{R}^N.$$

Como

$$\int_{B_1(0)} |u_{n,1}(x + y_n^1)|^2 dx > \delta/2,$$

segue do Teorema de Rellich que

$$\int_{B_1(0)} |u_1(x)|^2 \geq \delta/2,$$

e assim  $u_1 \neq 0$ . Mas  $u_{n,1} \rightarrow 0$  em  $E_\lambda$ , então  $(y_n^1)$  é ilimitada e, a menos de subsequências, podemos assumir que  $|y_n^1| \rightarrow \infty$ . Além disso, como  $I'_\infty(u_{n,1}) = o_n(1)$ , podemos deduzir que  $u_1$  é uma solução fraca do problema no infinito. Definamos agora

$$u_{n,2} := u_{n,1}(x) - u_1(x - y_n^1).$$

Então, como anteriormente, temos

- a)  $\|u_{n,2}\|_\lambda^2 = \|u_n\|_\lambda^2 - \|\bar{u}\|_\lambda^2 - \|u_1\|_\lambda^2 + o_n(1);$
- b)  $I_\infty(u_{n,2}) \rightarrow d - I(\bar{u}) - I_\infty(u_1);$
- c)  $I'_\infty(u_{n,2}) \rightarrow 0.$

A verificação destes itens segue a mesma argumentação utilizada anteriormente nos itens análogos para a sequência  $(u_{n,1})$ , com as devidas adaptações. Assim, se  $\|u_{n,2}\| \rightarrow 0$ , concluímos a demonstração. Caso contrário, se  $u_{n,2} \rightarrow 0$  e não converge forte à zero, contruímos  $u_{n,3}(x) := u_{n,2}(x) - u_2(x - y_n^2)$  e repetimos o argumento. Dessa forma, obtemos uma sequência de pontos  $(y_n^j) \subset \mathbb{R}^N$  tais que  $|y_n^j| \rightarrow \infty$ ,  $|y_n^j - y_n^i| \rightarrow \infty$ ,  $i \neq j$  e sequências de funções  $u_{n,j}(x) := u_{n,j-1}(x) - u_{j-1}(x - y_n^{j-1})$ ,  $j \geq 2$  tais que

$$u_{n,j}(x + y_n^j) \rightharpoonup u_j(x) \text{ em } E,$$

e  $u_j$  é solução fraca do problema no infinito. Como  $I_\infty(u_j) \geq c_\infty$  e  $I(u_n) \rightarrow b$ , da expressão

$$I(u_n) = I(\bar{u}) + I_\infty(u_1) + I_\infty(u_2) + o_n(1),$$

tal iteração deve parar em algum índice finito  $j \geq 2$ .

□

## A.5 Teorema de Linking

Apresentaremos agora os resultados e definições necessários para podermos demonstrar o Teorema de Linking, e seguiremos os resultados apresentados em [8]. Começaremos com a seguinte definição para sequências de Cerami, mais geral em relação à que estivemos utilizando até então:

**Definição A.4.** Dizemos que o funcional  $f \in C^1(X, \mathbb{R})$  satisfaz a condição (C) em  $(c_1, c_2)$ , com  $-\infty \leq c_1 < c_2 \leq \infty$  se

- a) toda sequência limitada  $(u_n) \subset f^{-1}((c_1, c_2))$ , com  $(f(u_n)) \leq M$  e  $f'(u_n) \rightarrow 0$  possui subsequência convergente;
- b) para todo  $c \in (c_1, c_2)$  existem  $\alpha, R, \sigma > 0$  tais que  $[c - \sigma, c + \sigma] \subset (c_1, c_2)$  e para toda  $u \in f^{-1}([c - \sigma, c + \sigma])$ ,  $\|u\|_\lambda$ , temos que  $\|f'(u_n)\| \|u\|_\lambda \geq \alpha$ .

**Definição A.5.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert real e  $S$  um subconjunto fechado em  $H$ . Seja  $Q$  uma variedade de Hilbert com fronteira  $\partial Q$ . Dizemos que  $S$  e  $\partial Q$  "link"se:

- (L<sub>1</sub>)  $S \cap \partial Q = \emptyset$ ;
- (L<sub>2</sub>) Se  $\varphi$  é uma aplicação contínua de  $H$  sobre  $H$  tal que  $\varphi(u) = u, \forall u \in \partial Q$ , então  $\varphi(Q) \cap S \neq \emptyset$ .

**Teorema A.6.** Suponha que  $f \in C^1(H, \mathbb{R})$  satisfaz as seguintes propriedades:

- (f<sub>1</sub>)  $f$  satisfaz a condição (C) em  $]0, +\infty[$ ;
- (f<sub>2</sub>) existem um subconjunto fechado  $S \in H$  e uma variedade de Hilbert  $Q \subset H$  com fronteira  $\partial Q$  com as seguintes propriedades:

- (a) existem duas constantes  $\beta > \alpha \geq 0$  tais que

$$f(u) \leq \alpha \quad \forall u \in \partial Q \quad \text{e} \quad f(u) \geq \beta \quad \forall u \in S;$$

- (b)  $S$  e  $\partial Q$  "link";

- (c)  $\sup_{u \in Q} f(u) < \infty$ .

Então  $f$  possui um valor crítico  $c \geq \beta$ .

Para provar este teorema, precisamos de mais algumas definições e resultados. Consideraremos  $H$  um espaço de Hilbert real e  $G$  um grupo compacto de transformações unitárias que age sobre  $H$ .

**Definição A.7.** Uma teoria do índice sobre  $H$  relacionada com o grupo  $G$  é a tripla  $\mathbb{I} = (\Sigma, \mathcal{H}, i)$  onde

- (a)  $\Sigma$  é a família dos subconjuntos fechados de  $H$  que são  $G$ -invariantes;
- (b)  $\mathcal{H}$  é o conjunto de aplicações contínuas em  $H$  que são  $G$ -invariantes;

(c)  $i : \Sigma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  é uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:

( $i_1$ )  $i(A) = 0$  se e somente se  $A = \emptyset$ ;

( $i_2$ )  $(A, B \in \Sigma, A \subset B) \Rightarrow (i(A) \leq i(B))$ ;

( $i_3$ )  $i(A \cup B) \leq i(A) + i(B), \forall A, B \in \Sigma$ ;

( $i_4$ )  $i(A) \leq i(\overline{h(A)}), \forall A \in \Sigma, \forall h \in \mathcal{H}$ ;

( $i_5$ ) Se  $A \in \Sigma$  é um conjunto compacto, então existe  $\delta > 0$  tal que  $i(N_\delta(A)) = i(A)$ , onde  $N_\delta(A)$  denota a  $\delta$ -vizinhança fechada de  $A$ .

Um exemplo é dado por  $G_1 = \{i_H\}$ , onde  $i_H$  é a aplicação identidade de  $H$ . Então:

- $\Sigma$  consiste de todos os subconjuntos fechados de  $H$ ;
- $\mathcal{H}$  consiste de todas as aplicações contínuas de  $H$ ;
- Se definimos  $i_1(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \emptyset \\ 1 & \text{se } A \in \Sigma \setminus \{\emptyset\} \end{cases}$  obtemos uma teoria do índice  $\mathbb{I}_1$  relacionada com  $G_1$ , que chamaremos de 'teoria do índice trivial'.

**Definição A.8.** Seja  $\mathbb{I} = (\Sigma, \mathcal{H}, i)$  uma teoria do índice sobre  $H$ , relacionada com o grupo  $G$  e  $S \in \Sigma$ . Chama-se uma teoria do pseudo-índice (relacionada à  $S$  e  $\mathbb{I}$ ) a tripla

$$\mathbb{I}^* = (S, \mathcal{H}^*, i^*),$$

onde  $\mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}$  é um grupo de homeomorfismos sobre  $H$  e  $i^* : \Sigma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  é a aplicação definida por

$$i^*(A) = \min_{h \in \mathcal{H}^*} i(h(A) \cap S). \quad (\text{A.6})$$

**Teorema A.9.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert real sobre o qual uma teoria do índice  $\mathbb{I} = (\Sigma, \mathbb{R}, i)$  relacionada ao grupo  $G$  age. Seja  $f \in C^1(H, \mathbb{R})$  um funcional  $G$ -invariante. Sejam  $S \in \Sigma$  e  $a, b, c_0, c_\infty \in \bar{\mathbb{R}}$  tais que

$$-\infty \leq a < c_0 < c_\infty < b \leq +\infty.$$

Considere a teoria do pseudo-índice  $\mathbb{I}^* = (S, \mathcal{H}^*, i^*)$ , onde  $\mathcal{H}^*$  é o grupo de homeomorfismos  $G$ -equivariantes  $h : H \rightarrow H$  tais que

$$h(u) = u \text{ se } u \notin f^{-1}(]a, b[).$$

Suponha que:



(a<sub>1</sub>)  $f$  satisfaz a condição (C) em  $]a, b[$ ;

(a<sub>2</sub>)  $S \subset f^{-1}([c_0, +\infty[)$ ;

(a<sub>3</sub>) existem um inteiro  $\bar{k} \geq 1$  e  $\bar{A} \in \Sigma$ , tais que  $\bar{A} \subset f^{-1}(]-\infty, c_\infty])$  e  $i^*(\bar{A}) = \bar{k}$ .

Então os números

$$c_k = \inf_{A \in \Sigma_k} \sup_{u \in A} f(u), \quad k = 1, 2, \dots, \bar{k}; \quad \Sigma_k = \{A \in \Sigma; i^*(A) \geq k\} \quad (\text{A.7})$$

são valores críticos de  $f$  e

$$c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{\bar{k}} \leq c_\infty. \quad (\text{A.8})$$

Ainda, se

$$c = c_k = \dots = c_{k+r} \text{ com } k \geq 1 \text{ e } k+r \leq \bar{k}$$

então

$$i(K_c) \geq r + 1. \quad (\text{A.9})$$

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [8], Teorema 2.9.

Estamos então agora prontos para demonstrar o Teorema A.6:

*Demonstração.* Seja

$$\mathcal{H}^* = \{h; h \text{ é um homeomorfismo de } H \text{ em } H \text{ e } h(u) = u \text{ se } u \notin f^{-1}(] \alpha, +\infty))\}$$

e consideremos a teoria do pseudo-índice  $\mathbb{I}_1^* = (S, \mathcal{H}^*, i_1^*)$  relacionada com  $S$  e a teoria do índice trivial  $\mathbb{I}_1$  (vide exemplo acima). Consideremos agora dois números positivos  $c_0$  e  $c_\infty$  tais que

$$c_\infty \geq \max \{\sup f(Q), \beta\} \quad \alpha < c_0 < c_\infty.$$

Mostraremos que  $(f_1)$ ,  $(f_2)$  implicam que as condições do Teorema A.9 são satisfeitas com

$$a = \alpha, \quad b = +\infty, \quad \bar{A} = Q, \quad \bar{k} = 1.$$

Obviamente,  $(a_1)$  e  $(a_2)$  são satisfeitas. Provaremos que  $(a_3)$  também é válida.

Como  $\partial Q$  e  $S$  "link",  $h(Q) \cap S \neq \emptyset$  para cada  $h \in \mathcal{H}^*$ . Então,  $i^*(Q) = 1$ . Assim, pelo Teorema A.9, concluímos que

$$c = \inf_{A \in \Sigma_1} \sup f(A)$$

é um valor crítico pertencente à  $[c_0, c_\infty]$ . Ainda

$$(i^*(A) = 1) \Rightarrow (A \cap S \neq \emptyset).$$

Então, pela hipótese (a), temos

$$\sup f(A) \geq \beta \quad \forall A \in \Sigma_1$$

e consequentemente

$$c \geq \beta.$$

□

Vamos finalmente mostrar que o nosso Teorema de Linking, apresentado como Teorema 4.27, é um caso particular do Teorema A.6.

*Demonstração.* (Teorema 4.27):

Mostraremos que nossa definição anterior de condição de Cerami ( $Ce$ ) satisfaz a condição ( $C$ ). De fato, suponha que o funcional  $I$  satisfaz a condição de Cerami ( $Ce$ ), para  $c \in \mathbb{R}$ , ou seja, temos que se  $I(u_n) \rightarrow c$  e  $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$ , então existe uma subsequência  $(u_{n_j})$  tal que  $u_{n_j} \rightarrow u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ . Temos dois casos a analisar:

Caso 1:  $(u_n)$  é limitada. Neste caso, temos que  $\|I'(u_n)\| \rightarrow 0$  e existe subsequência convergente  $(u_{n_j})$ . Assim, a condição (a) é satisfeita.

Caso 2:  $(u_n)$  não é limitada. Mostraremos que o item (b) deve ocorrer. De fato, suponha que (b) não ocorre, ou seja, não existem as constantes positivas  $\alpha, R, \sigma$ . Logo, existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que dados  $\alpha, R, \sigma > 0$  existe  $u \in I^{-1}([c - \sigma, c + \sigma])$ ,  $u = u(\alpha, R, \sigma)$ , com  $\|u\|_\lambda \geq R$ , mas  $\|I'(u)\|\|u\|_\lambda < \alpha$ . Considere então  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $R = n$  e  $\alpha = \sigma = 1/n$ . Assim, obtemos uma sequência  $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$  onde  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I^{-1}([c - 1/n, c + 1/n])$ ,  $\|u_n\|_n \geq n$  e  $\|I'(u_n)\|\|u_n\|_\lambda < 1/n$ . Observe que daqui segue que existe uma constante  $M > 0$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, |I(u_n)| \leq M$ . Além disso,

$$\|I'(u_n)\|n \leq \|I'(u_n)\|\|u_n\|_\lambda \leq 1/n,$$

logo,  $I'(u_n) \rightarrow 0$  em  $E'$ . Assim,  $\|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|_\lambda) \rightarrow 0$ . Pela condição ( $Ce$ ), existe  $u \in E$  tal que  $u_n \rightarrow u$ , a menos de subsequências, mas isto é uma contradição, pois  $(u_n)$  não era limitada.

Assim, estamos nas condições do Teorema A.6, e a prova segue análoga. □

**Observação A.3.** Uma outra versão para Teorema de Linking para sequências de Cerami, em condições mais gerais, pode ser também encontrada em [40] e [43].

# Referências Bibliográficas

---

- [1] S. Alama , Y. Y. Li, *On "multi bump" bound states for certain semilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., **41**(1992), 983-1026.
- [2] A. Ambrosetti, *Remarks on some systems of nonlinear Schrödinger equations*, J. Fixed Point theory Appl. **4**, no.1, (2008), 35-46.
- [3] A. Ambrosetti, G. Cerami, D. Ruiz, *Solitons of linearly coupled systems of semilinear non-autonomous equations on  $\mathbb{R}^N$* , J. of Func. Anal. **254**, (2008), 2816-2845.
- [4] A. Ambrosetti, E. Colorado, *Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations*, J. London Math.Soc. **2** (2007), no. 75, 67-82.
- [5] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. of Func. Anal. **14**, (1973), 349-381.
- [6] A. Azzollini, A. Pomponio, *On the Schrödinger equation in  $\mathbb{R}^N$  under the effect of a general nonlinear term*, Indiana Univ. Math. J. **58**, no.3, (2009), 1361-1378.
- [7] A. Bahri, Y. Y. Li, *On a Min-Max Procedure for the Existence of a Positive Solution for Certain Scalar Field Equations in  $\mathbb{R}^N$* , Rev. Mat. Iberoamericana, **6**, nos. 1-2, (1990), 1-15.
- [8] P. Bartolo, V. Benci and D. Fortunato, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity*, Nonlinear Anal. **7** (1983), 981-1012.
- [9] T. Bartsch, Z. Q. Wang, *Note on ground state of nonlinear Schrödinger systems*, J. Partial Differ. Equ. **19**, (2006), 200-207.
- [10] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82**, no. 4, (1983), 313-345.

- 
- [11] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, (2010).
  - [12] H. Brezis and E. H. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88**, no. 3, (1983), 486-490.
  - [13] H. Brezis and E.H. Lieb, *Minimum Action of Some Vector Field Equations*, Comm. Math. Phys **96**, (1984), 97-113.
  - [14] J. Busca, B. Sirakov, *Symmetry Results for Semilinear Elliptic Systems in the Whole Space*, J. Differ. Equ. **163**, (2000), 41-56.
  - [15] A. R. Champneys, J. Yang, *A scalar nonlocal bifurcation of solitary waves for coupled nonlinear Schrodinger systems*, Nonlinearity, **15**, (2002), 2165-2192.
  - [16] D.G. Costa, C.A Magalhães, *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity*, Nonlinear Anal. **23** (1994), 1401-1412.
  - [17] D. G. Costa, C. A. Magalhães, *A Variational Approach to Subquadratic Perturbations of Elliptic Systems*, J. Differ. Equ. **111**, (1994), 103-122.
  - [18] D. G. Costa, C. A. Magalhães, *A Variational Approach to Noncooperative Elliptic Systems*, Nonlinear Anal. **25**, no. 7, (1995), 699-715.
  - [19] D.G. Costa, H. Tehrani *On a Class of Asymptotically Linear Elliptic Problems in  $\mathbb{R}^N$* , J. Differ. Equ. **173**, (2001), 470-494.
  - [20] V. Coti-Zelati, P. H. Rabinowitz, *Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on  $\mathbb{R}^N$* , Comm. Pure Appl. Math. **46**, (1992), 1217-1269.
  - [21] A. S. Desyatnikov, D. Neshev, E. A. Ostrovskaya, Y. S. Kivshar, G. McCarthy, W. Krolikowski, B. Luther-Davies, *Multipole composite spatial solitons: theory and experiment*, J. Opt. Soc. Am. B **19**, (2002), 586-595.
  - [22] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47**, (1974), 324-353.
  - [23] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, Springer-Verlag in Berlin, New York, (1990).
  - [24] D.G. de Figueiredo, P.-L. Lions, R.D. Nussbaum, *A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations*, J. Math. Pures Appl.(9) **61** (1982), no.1, 41-63.

- 
- [25] D. G. de Figueiredo, O. Lopes, *Solitary waves for some nonlinear schrödinger systems*, Ann. I. H. Poincaré AN **25**, (2008), 149-161.
- [26] M. F. Furtado, L. A. Maia, E. A. Silva, *Solutions for a Resonant Elliptic System with Coupling in  $\mathbb{R}^N$* , Commun. Partial Diff. Eq. **27**, no. 7-8, (2002), 1515-1536.
- [27] L. Jeanjean, K. Tanaka, *A remark on least energy solutions in  $\mathbb{R}^N$* , Proc. Amer. Math. Soc. **131**, no. 8, (2002), 2399-2408.
- [28] L. Jeanjean, K. Tanaka, *Singularly perturbed elliptic problems with superlinear or asymptotically linear nonlinearities*, Calc. Var. **21**, (2004), 287-318.
- [29] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag, France,(1991).
- [30] G. Li, H.-S. Zhou, *The existence of a positive solution to asymptotically linear scalar field equations*, Proc. R. Soc. Edinb. **130 A**, (2000), 81-105.
- [31] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. I. H. Poincaré AN **1**, (1984), 109-145 and 223-283.
- [32] N. M. Litchinister, W. Królikowski, N. N. Akhmediev, G. P. Agrawal, *Asymmetric partially coherent solitons in saturable nonlinear media*, Phys. Rev. E **60**, (1999), 2377-2380.
- [33] L. A. Maia, E. Montefusco, B. Pellaci, *Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system*, J. Differ. Equ. **229**, (2006), 743-767.
- [34] L. A. Maia, E. Montefusco, B. Pellaci, *Weakly coupled nonlinear Schrödinger systems: the saturation effect*, Cal. Var., preprint.
- [35] S. V. Manakov, *On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of eletromagnetic waves*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **65**, (1973) 505 (Trad. Ing. Sov. Phys.-JETP **38**, 248-253 (1974)).
- [36] L. H. de Miranda, *Sistemas Elípticos Fracamente Acoplados Assintoticamente Lineares*, Dissertação, Brasília-UnB, (2007).
- [37] E. A. Ostrovskaya, Y. S. Kivshar, *Multi-bump optical solitons in a saturable medium*, J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt. **1**, (1999), 77-83.
- [38] A. Pankov, V. Rothos, *Periodic and decaying solutions in discrete nonlinear Schrödinger with saturable nonlinearity*, Proc. R. Soc. A **464**, (2008), 3219-3236.

- 
- [39] R. Ruviano, *Existência de soluções positivas ou nodais para problemas assintoticamente lineares*, Tese, Brasília-UnB, (2011).
- [40] M. Schechter, *Linking methods in critical point theory*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, (1999).
- [41] J. Shatah, *Unstable Ground State of Nonlinear Klein-Gordon Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **290**, no. 2, (1985), 701-710.
- [42] B. Sirakov, *Least energy solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in  $\mathbb{R}^N$* , Comm. Math. Phys. **271**, (2007), 199-221.
- [43] E.A.B. Silva, *Subharmonic solutions for subquadratic Hamiltonian systems*, J. Dif. Equations **115** (1995), 120-145.
- [44] G. S. Spradlin, *Existence of solutions to a hamiltonian System without convexity condition on the nonlinearity*, Elect. J. of Diff. Eq., no. 21, (2004), 1-13.
- [45] G. S. Spradlin, *Interacting near-solutions of a hamiltonian system*, Calc. Var. **22**, (2005), 447-464.
- [46] G. I. Stegeman, M. Segev, *Optical spatial solitons and their interactions: universality and diversity*, Science **286**, (1999), 1518-1523.
- [47] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. **55**, (1977), 149-162.
- [48] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math. Z. **187**, no.4, (1984), 511-517.
- [49] C.A. Stuart, H.S. Zhou, *Applying the Mountain Pass Theorem to an Asymptotically linear Elliptic Equation on  $\mathbb{R}^N$* , Commun. Partial Diff. Eq. **9-10**, (1999), 1731-1758.
- [50] C. Weidmann, M. Ahles, J. Petter, D. Träger, J. Schröder, C. Denz, *Spatial optical (2+1)-dimensional scalar - and vector - solitons in saturable nonlinear media*, Ann. Phys. (Leipzig) **11**, (2002), 573-629.
- [51] M. Willem, *Minimax Theorems*, Volume 24, Birkhauser, Boston, 1996.